EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

februari
2002/nr.5
jaargang 77



ICT IN HET VMBO
SCHUIFBALKEN IN EXCEL
REGIONALE BIJEENKOMSTEN

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per verenigingsjaar: € 36,50
Studentleden: € 18,00
Leden van de VVWL: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: € 38,50 per jaar.
Voor instituten en scholen: € 110,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 13,50. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

5

februari 2002 JAARGANG 77

INHOUD

Aan dit nummer werkten verder mee:
Peter Boonstra, Albert Ringeling, Klaas-Jan Wieringa en Sam de Zoete.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Herijking Tweede fase

In januari verscheen de notitie ‘Continuïteit en vernieuwing’ met aanpassingsvoorstellen voor de Tweede Fase. Daarin nu ook eens wat aandacht voor werkdrukvermindering van docenten: verkleining van het aantal groepen per docent, minder handelingsdelen. Andere voorstellen in die notitie: minder voorschriften voor het schoolexamen, drie vakken per profieldeel, vergroting van de mogelijkheden voor het vrije deel, en een andere uitslagregel bij het eindexamen.
In de media was daarnaast veel aandacht voor het oplossen van de problemen bij de deeltalen, maar ook wiskunde-B wordt in de notitie genoemd bij het voorstel tot omzetting van deelvakken in volledige vakken. Wat hiermee precies bedoeld wordt, is op het moment van het schrijven van dit stukje niet helder. Adelmund heeft duidelijkheid op de middelkorte termijn toegezegd: vóór 1 april wordt aangegeven welke maatregelen al vóór 1 augustus 2005 doorgevoerd kunnen worden, en nog voor de zomer verschijnt een nadere uitwerking van de hoofdlijnen van de aanpassingsvoorstellen.
De notitie ‘Continuïteit en vernieuwing’ is onder meer te vinden op de site van het ministerie (*www.minocw.nl*).

Adviestabel NVvW

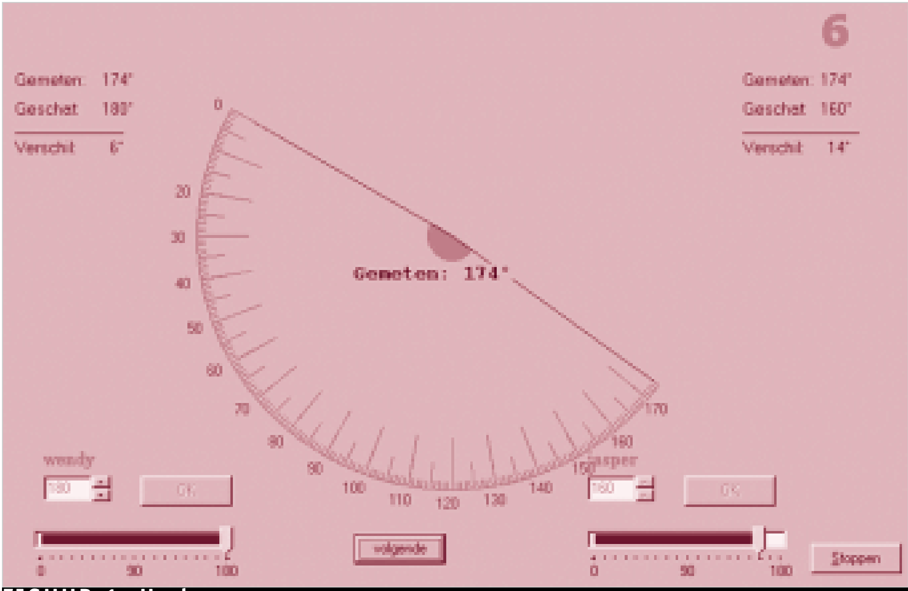
Op veel scholen ervaren docenten de toebedeelde contacttijd voor wiskunde in de Tweede fase als ontoereikend. Het bestuur van de NVvW heeft vorig jaar een adviestabel ontworpen, gebaseerd op lesuren van 50 minuten en 50% van de studielast in contacttijd.
Twee voorbeelden uit die tabel.
Havo A12: 3-3 (3 uur in klas 4, en 3 uur in klas 5).
Vwo B1: 4-4-4.
Misschien is het nuttig deze tabel en de bijbehorende open brief aan schooldirecties voor te leggen aan uw schoolleiding. Ze zijn beide te vinden op *www.nvvw.nl*.

Dit nummer

Het Bottema/meetkunde-nummer was drie keer zo dik als gewoonlijk, nu moet u het weer doen met een schamele 36 bladzijden. Drie keer zo dik, mag je dat trouwens een ‘driedubbel’ nummer noemen? Nee, dàt moet toch eigenlijk zes of acht maal zo dik betekenen! Misschien is de term ‘drievoudig’ beter? Tsja.
In dit nummer onder meer twee artikelen over ICT:
Peter Mulkerrin schreef voor het Engelse tijdschrift MicroMath over schuifbalken in Excel, Pauline Vos vertaalde het artikel en bewerkte het voor de Nederlandse situatie.
Peter van Wijk laat met een reeks voorbeelden zien hoe ICT op praktische en waardevolle wijze ingezet kan worden in het vmbo.
Integratie van werken en leren komt voor op alle niveaus: van praktijkonderwijs en leer-werktrajecten in de basisberoepsgerichte leerweg tot duaal wetenschappelijk onderwijs. Over dat laatste, namelijk over de opleiding ‘wiskunde en statistiek’ aan de UvA, bericht Peter de Paepe.
Tot slot: Mocht u al een tijd vergeefs gewacht hebben op uw ladderprijs, lees dan de oproep op pagina 258.

Redactie

De redactie kent sinds kort twee nieuwe gezichten: Jos Tolboom en Klaske Blom. Ze brengen allebei hun eigen kwaliteiten in. Jos is aangesteld als ICT-redacteur, Klaske zal zich vooral richten op didactische kwesties in de Tweede fase en het studiehuis. We zijn blij met ze!

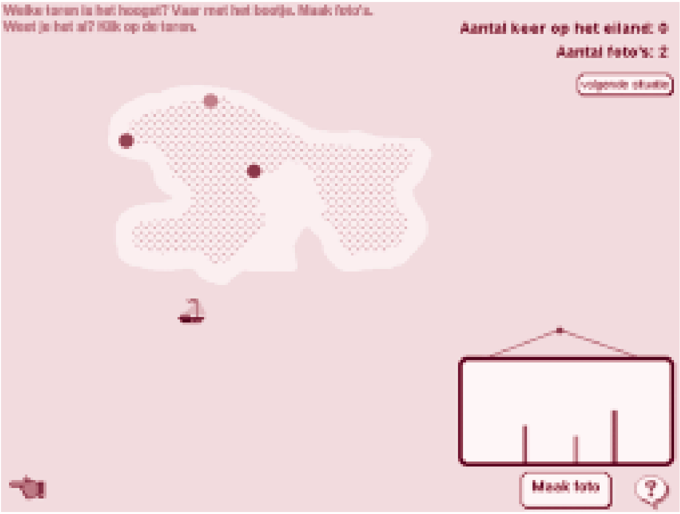


FIGUUR 1 Hoeken

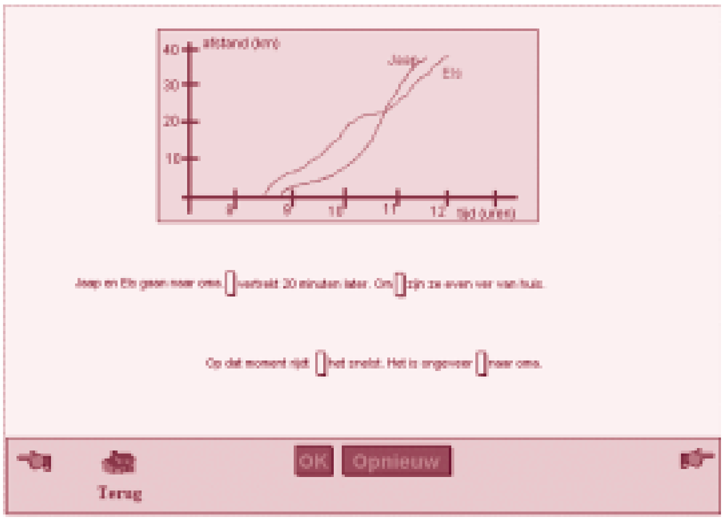
ICT IN HET VMBO

Ook voor het vmbo zijn inmiddels diverse voorbeelden van geschikt digitaal materiaal aan te wijzen.

[Peter van Wijk]



FIGUUR 2 Eiland



FIGUUR 3 Grafiek

Inleiding

De belangrijkste verandering in het voortgezet onderwijs voor de komende jaren is ongetwijfeld de steeds grotere invloed die de inzet van de computer en het benutten van informatietechnologie met zich meebrengen. Het gebruik van de computer is een verplicht kerndeel voor de basisvorming en ook een eindterm in het examenprogramma vmbo. Tot nu toe werd de computer vooral beschouwd als een verlengstuk van het bestaande lesrepertoire. In de toekomst zullen scholen steeds meer de verbinding gaan leggen tussen ICT en inhoudelijk beleid gericht op leren: de relatie leren leggen tussen schoolconcept en ICT als spil van schoolontwikkeling. ICT zal in de toekomst belangrijk gereedschap zijn voor de leraar bij het ontwerpen en begeleiden, en voor de leerling bij het leren.

Op dit moment is er voldoende digitaal materiaal beschikbaar –in de vorm van educatieve software of internetopdrachten– dat specifiek geschikt is om in het vmbo in te zetten. Maar het blijkt veel tijd te vergen en geld te kosten om ICT goed te implementeren in het onderwijs. Het motto is dan ook: langzaam aan, maar wel steeds kleine stappen zetten.

De computer bij wiskunde

Naast het leren werken met de computer als tekstverwerker is het even belangrijk ICT te benutten voor het leren van wiskunde en het aanpakken van wiskundige en toegepaste problemen. Maar op dit moment doen zich op sommige scholen een aantal problemen voor. De techniek laat de school nogal eens in de steek, veel scholen hebben geen goed systeembeheer en hebben te maken met overbezetting van het computerlokaal, en internet wil nog wel eens erg traag zijn. Gelukkig groeit het aantal scholen met goede ICT-faciliteiten gestaag. De afgelopen jaren is gebleken dat computerprogramma's een positieve bijdrage kunnen leveren aan de wiskundeles. De computer blijkt op verschillende manieren goed ingezet te kunnen worden: om te oefenen, om leerstof te herhalen of te vervangen, simulaties uit te voeren, te remediëren, om een probleem te verkennen, om begrip te ontwikkelen, als 'tool' bij het oplossen van een probleem en gewoon om eens naar de computerruimte te gaan ter afwisseling. Vaak is het mogelijk hierbij een gedeelte van een hoofdstuk te laten vervallen en te vervangen door een computerles.

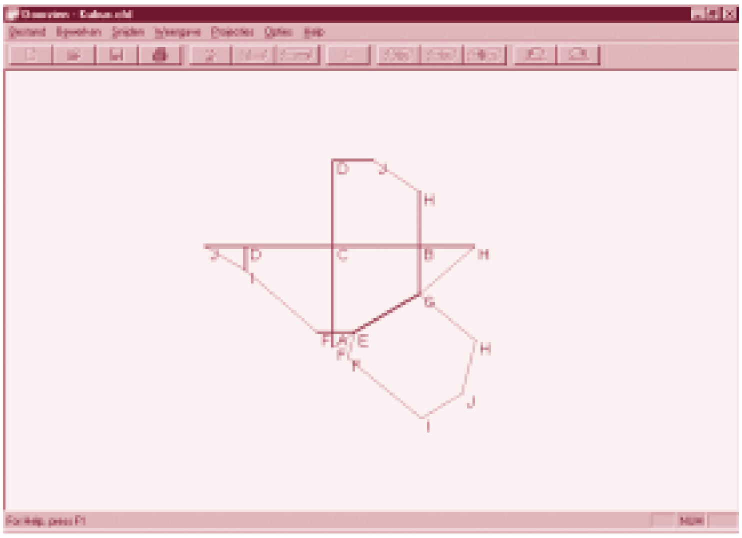
Als je naar de ICT-eindtermen van het vmbo bij wiskunde kijkt, komt dat neer op het gebruik van de computer bij de onderdelen rekenen, meten, schatten, statistisch verwerken van data, het oplossen van problemen waarbij verbanden tussen variabelen een rol spelen en het interpreteren van ruimtelijke situaties. Laten we een aantal voorbeelden nader bekijken.

Hoeken

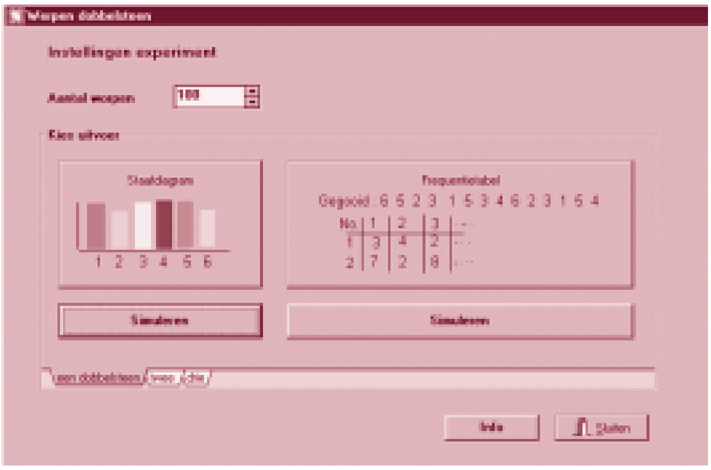
Het eerste voorbeeld (zie figuur 1) is het programma *Hoeken* (Macco, Sittard; tel.: 046 4110340). De kracht van dit programma is vooral dat het heel doelgericht is en in spelvorm door twee leerlingen wordt gespeeld. Binnen een les hebben leerlingen het verschil door tussen een scherpe en stompe hoek en kunnen ze een goede schatting maken van een willekeurige hoek tussen 0 en 180 graden. Als de leerlingen dit programma geoefend hebben, kun je een gedeelte van de leerstof uit het boek overslaan.

Wiskie

Zo zijn er op dit moment nog een aantal programma's die in de nabije toekomst in het vmbo zeker naast het boek een plaats zullen verwerven binnen de wiskundeles. Eén van die programma's is *Wiskie* (te downloaden via *http://www.fi.uu.nl*). Het bevat de onderdelen schatten, tafels, getallenfabriek, weetjesquiz, bollenschieten, eiland, oppervlakte, ballonvaren en grafieken. In het programma staat het oefenen en automatiseren van efficiënte strategieën centraal. Het zijn kleine overzichtelijke oefenprogramma's, heel visueel en zelfsturend. Deze programma's zijn ontwikkeld door het Freudenthal Instituut. Het onderdeel *Eiland* kan gebruikt worden om leerlingen te leren redeneren met behulp van kijklijnen (zie figuur 2). Dit onderdeel sluit aan bij domein C meetkunde, kerndoel 19: de leerlingen kunnen vlakke afbeeldingen van ruimtelijke situaties interpreteren, beschrijven, zich ruimtelijk voorstellen en



FIGUUR 4 Doorzien



FIGUUR 5 Dobbelsteen

al dan niet op schaal weergeven op papier of scherm. Daarbij gaat het om: foto's, patroontekeningen, plattegronden, landkaarten en bouwtekeningen.
Een ander onderdeel is *Grafieken* (zie figuur 3), geschikt voor de brugklas om allerlei soorten grafieken in een context te leren interpreteren en te verkennen. Dit onderdeel sluit aan bij domein B, algebraïsche verbanden, en domein D, informatieverwerking en statistiek.
Bij de onderdelen *Getalfabriek*, *Schatten*, *Oppervlakte* en *Bollenschieten* is het ook mogelijk kant-en-klare lesbrieven te downloaden (eveneens via *http://www.fi.uu.nl*). Deze lesbrieven zijn geschikt voor klas 1 en 2 van het vmbo.

Andere software

Naast bovengenoemde programma´s leveren uitgevers educatieve software bij de schoolboeken. De kracht van deze programma's zit vooral in het feit dat ze dicht bij de stof staan, leerlinggericht zijn en zowel vervangend, verrijkend als ondersteunend gebruikt kunnen worden. Een paar voorbeelden:

Doorzien

Doorzien (zie figuur 4) is een computerprogramma voor het ruimtemeetkundeonderwijs. Het helpt bij het leren interpreteren van vlakke afbeeldingen van ruimtelijke figuren. Het helpt leerlingen bij de overgang van het werken met concreet materiaal naar projectiefiguren. Doorzien is een uitstekend programma in klas 2 van het vmbo om klassikaal een demonstratie te geven met een beamer rondom de onderdelen 'doorsnede' en 'bouwplaat'. Het interactieve aspect spreekt leerlingen erg tot de verbeelding: een 'doorsnede' klapt open tot een 'bouwplaat'.

VU-Grafiek

Het bijzondere van VU-Grafiek is dat het met (eenvoudige) woordformules kan werken; de invoer van formules en tabellen gaat op dezelfde manier zoals de leerling dat gewend is in het leerboek. VU-Grafiek kent geen handleiding, maar wel een uitgebreide hulpfunctie die door taalgebruik en veel afbeeldingen speciaal geschikt is voor leerlingen.

VU-Stat

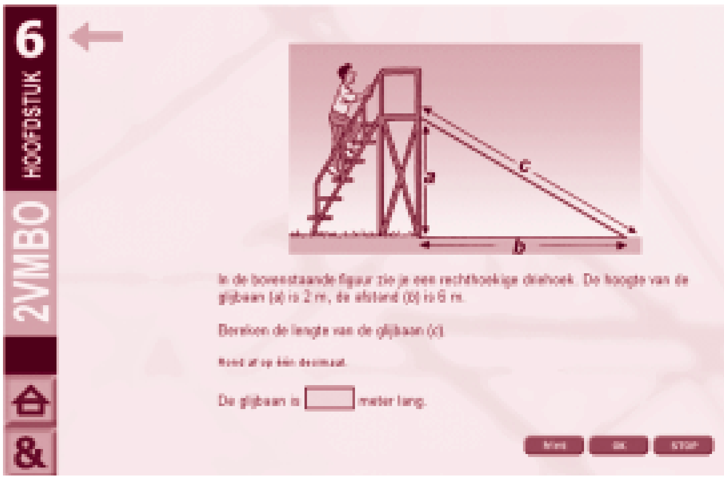
Waar vroeger, door tijdrovende berekeningen, statistiek op school niet wezenlijk tot zijn recht kon komen, is dat nu, dank zij de computer, verleden tijd. Met het programma VU-Stat kunnen leerlingen met grote databestanden werken waardoor echte statistiek in beeld komt. Verder is het mogelijk om simulaties zoals het gooien van een munt of dobbelsteen te laten zien, heel geschikt om het begrip 'kans' aanschouwelijk te maken (zie figuur 5).

Xamen

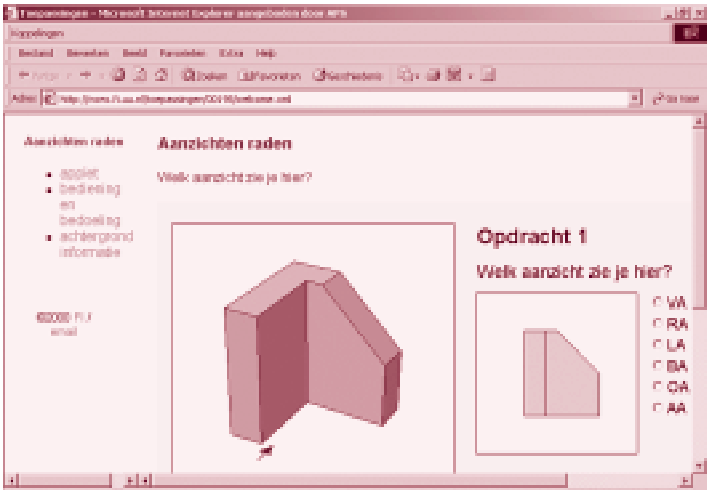
Xamen 1 en 2, zogenaamde methodesoftware, zijn ontworpen voor gebruikers van Getal en Ruimte. De leerlingen kunnen deze software gebruiken bij het oefenen van de stof (in principe voor gebruik thuis); de docent kan het gebruiken voor ondersteuning bij de les. Het onderdeel 'het hele hoofdstuk door elkaar', een mix van alle paragrafen van een hoofdstuk, geeft een goede serie oefenopgaven, geschikt als extra oefening of als voorbereiding op een proefwerk. Tijdens het oefenen kun je hints krijgen; wanneer de leerling veel goede antwoorden geeft, zullen de opgaven automatisch moeilijker worden. Tevens is het mogelijk een score bij te houden. Een onderwerp als grafieken of Pythagoras komt in andere wiskundemethoden natuurlijk ook voor. De software is dan ook heel geschikt -op onderwerp- te gebruiken bij andere wiskundemethoden (zie figuur 6).

Internet

Tot nu toe is internet buiten beschouwing gelaten. Er zijn nog steeds scholen waar internet niet of nauwelijks werkt. Maar in de toekomst zal internet een steeds grotere rol gaan spelen in onze maatschappij; ook in het onderwijs neemt nut en belang ervan toe. Zo langzamerhand zijn er op internet ook echt heel geschikte onderdelen te vinden voor het vmbo.
Internet wordt vooral gebruikt als informatiebron, als naslagwerk en als opzoekmedium, handig bij een GWA of een praktische opdracht. Maar internet kan voor het wiskundeonderwijs meer zijn dan een encyclopedie of bibliotheek. Er zijn plaatsen op internet waar kant-en-klaar onderwijs te vinden is. Leerlingen kunnen naar



FIGUUR 6 Pythagoras



FIGUUR 7 Aanzichten raden

zo'n plaats en ze kunnen direct aan de slag. Als docent hoef je niet veel te doen en het vervangt een gedeelte van een hoofdstuk uit het boek. Het Wisweb van het Freudenthal Instituut is zo'n plaats met heel veel onderwerpen: *http://www.fi.uu.nl/wisweb*. Een voorbeeld hiervan is *Aanzichten raden* (zie figuur 7), een twintigtal opdrachten rondom boven-, zij- en vooraanzicht.
Daarnaast zijn sommige docenten heel actief in het plaatsen van allerlei materiaal op internet. Erwin Broekema heeft oefenmateriaal op zijn site staan rondom de onderwerpen abc-formule, lineaire formules, oppervlakte, Pythagoras, coördinaten, eerstegraads vergelijkingen en negatieve getallen (*http://wiskunde/hacom.nl/wiskunde/leerl/oefenmat.html*).
Als docent moet je natuurlijk wel kijken of het aansluit bij jouw manier van lesgeven, bij het niveau van de leerlingen en wat de toegevoegde waarde ervan is.
Tot slot nog twee adressen waar zonder meer veel informatie en ideeën op te doen zijn:
http://www.digischool.nl/wiskunde en
http://www.nvvw.nl/Lesmateriaal2.html

Meerwaarde

Als men naar bovengenoemde voorbeelden voor het vmbo kijkt, zit de meerwaarde vooral in de visuele ondersteuning in de vorm van grafieken en drie-dimensionale figuren, afwisseling, feedback-functie, eindeloze oefening, individueel en in eigen tempo aan een probleem kunnen werken, interactieve opdrachten, vervanging van een gedeelte van een hoofdstuk, mogelijkheden om op de actualiteit in te spelen, voorbereiden van een proefwerk en eindeloos geduld van de computer.
Met de computer is het mogelijk op een speelse en uitdagende manier wiskunde en rekenen te oefenen. Speels dankzij het uiterlijk, de lage drempel en de feedback van de programma's, uitdagend door snelle feedback, helpfunctie, vormgeving en score. Het belang van dit oefenen is versteviging van begrip en leerlingen het vertrouwen geven dat ze bepaalde vaardigheden beheersen. Met name dit laatste kunnen sommige leerlingen in het vmbo hard gebruiken.

Rol van de docent

Een belangrijke rol bij dit alles is weggelegd voor de docent. Leerlingen moet geleerd worden op een goede manier met de computer om te gaan, ICT op de juiste manier en op het goede moment in te zetten. Er moet oog voor zijn om ICT als vervanging of verrijking van de leerstof uit het boek in te zetten. De docent zal er verder zorg voor moeten dragen dat de leerling niet blijft steken in de instructie van een programma, maar ook daadwerkelijk aan de wiskundige inhoud toekomt.
Uit bovengenoemde voorbeelden mag duidelijk zijn dat er ook voor het vmbo kansen liggen om ICT voor de wiskundeles te benutten.

Bronnen

[1] Wouter de Beukelaer: Rekenen op Wiskie (juni 2000, scriptie), Instituut voor Leraar en School (Faculteit Educatie, Van Schuijlenburgweg 3, 6538 LH Nijmegen, tel.: 024 3459973)
[2] E. Harskamp, C. Suhre: Software voor rekenen en wiskunde in de brugklas, GION 1999
[3] Hans Stam, Peter van Wijk: Computergebruik bij wiskunde, APS (2000, ISBN 90 6607 337 3)
[4] Jos Geerlings, Willem Hoekstra, Martin van Reeuwijk, Peter van Wijk: Wiskunde en internet, APS (1999, ISBN 90 6607 313 6)
[5] Carel van de Giessen, Piet van Blokland: VU-Stat voor Windows, Kennismaken en Toepassen, Wolters-Noordhoff (1999, ISBN 90 01 83296 2)
[6] Carel van de Giessen, Anne van der Horst: VU-Grafiek voor Windows, Kennismaken en Toepassen, Wolters-Noordhoff (2001, ISBN 90 01 83303 9)
[7] Michiel Doorman: Doorzien, EPN (2000, ISBN 90 11 06208 6)
[8] Xamen, EPN

Over de auteur

Peter van Wijk (e-mailadres: p.vanwijk@aps.nl) is docent aan College De Klop te Utrecht en medewerker van APS-wiskunde.

SCHUIFBALKEN IN EXCEL

Met schuifbalken kunnen tabellen en grafieken in Excel op een prachtige manier dynamisch gestuurd worden.

[Peter Mulkerrin; *vertaald en bewerkt door Pauline Vos*]

Vooraf

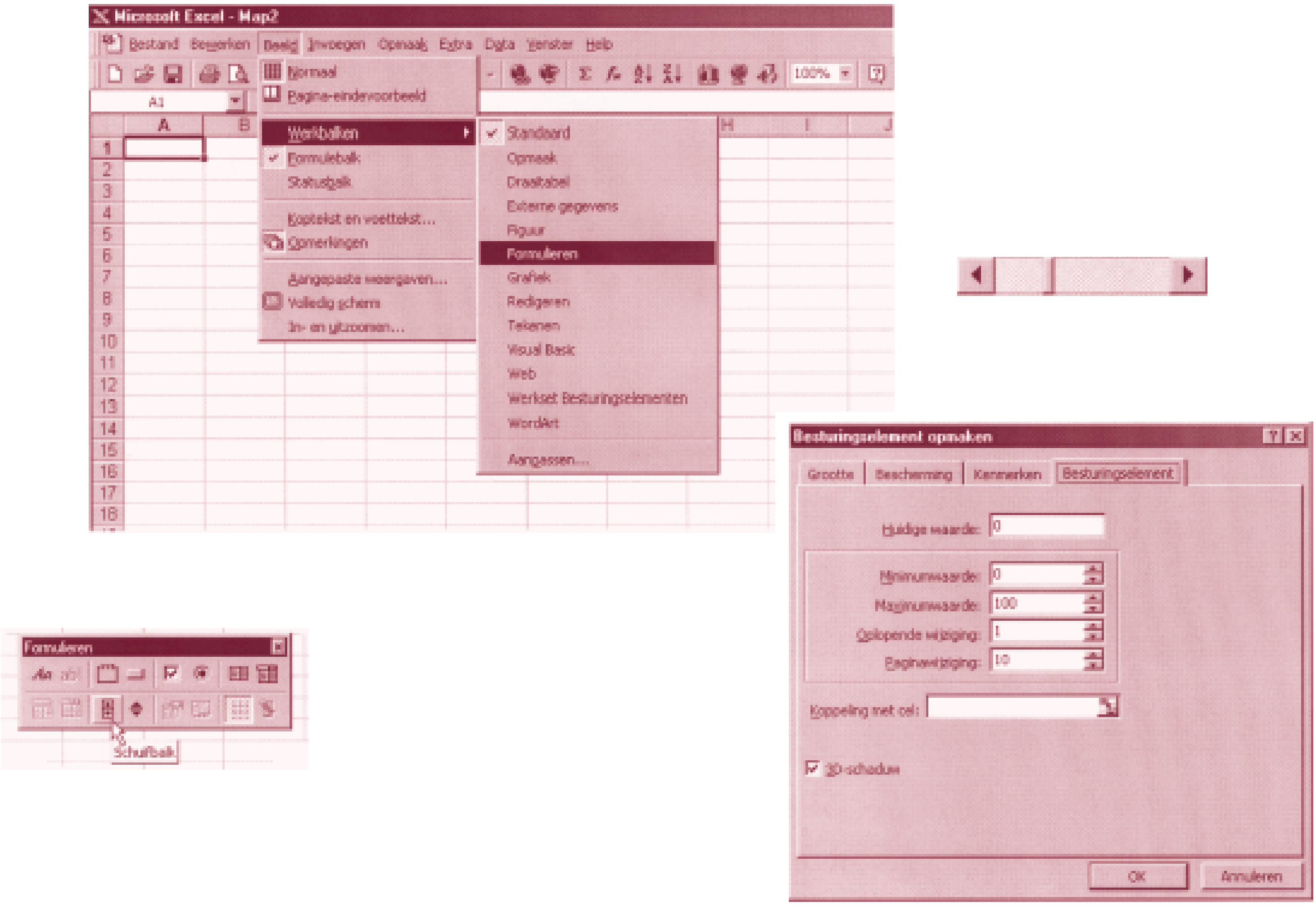
Dit artikel gaat over het gebruik van schuifbalken in het computerprogramma Excel. Met schuifbalken zijn tabellen verrassend actief te maken.
In het eerste deel van dit artikel wordt beschreven hoe een schuifbalk in een spreadsheet geplaatst kan worden. In het tweede deel staat een kort verslag van een Engelse wiskundeles waarin schuifbalken in Excel werden ingezet.
Het oorspronkelijke artikel, geschreven door de Engelse wiskundedocent Peter Mulkerrin, verscheen eerder in MicroMath 16(2), een tijdschrift over computergebruik in de wiskundeles van onze Engelse zustervereniging ATM (Association of Teachers of Mathematics). Schuifbalken zijn ook prima inzetbaar in het Nederlandse wiskundeonderwijs, bijvoorbeeld bij Praktische Opdrachten. Dit gegeven leidde tot een vertaling en bewerking van het Engelse artikel.

Inleiding

De schuifbalk is een eenvoudig middel voor het invoeren en manipuleren van variabelen. In Excel kun je deze in een werkblad plaatsen en er de waarde van één cel mee sturen. Van te voren moet worden aangegeven wat het bereik is van de betreffende cel. Ook moet de toename aangegeven worden waarmee de waarde van de cel verandert als er aan de schuifbalk wordt geschoven.

Hoe maak je een schuifbalk?

De knop voor het creëren van een schuifbalk (zie figuur 1) is te vinden in de werkbalk ‘Formulieren’ (zit onder ‘Beeld’ in de taakbalk; zie figuur 2).
Klik op deze knop, en bepaal de positie en afmeting in het werkblad door de muis te slepen. De schuifbalk kan horizontaal of verticaal staan. De positie en afmeting kunnen later opnieuw aangepast worden (zie figuur 3).
Nu moet de schuifbalk gereed voor gebruik gemaakt worden. Klik met de rechter muisknop op de schuifbalk en er verschijnt een keuzemenu. Kies voor ‘Besturingselement opmaken’ (zie figuur 4). Er komt dan een dialoogvenster met dezelfde titel. Klik hier op de tab voor ‘Besturingselement’. Hier moet de koppeling met de cel aangebracht worden door het cel-adres ervan in te typen.
Voorts moeten de minimale en maximale waarden aangegeven worden. Dit is dus het bereik van de variabele. De mogelijkheden zijn hier enigszins beperkt doordat de waarden geheeltallig moeten zijn en tussen 0 en 30000 moeten liggen. Met deze beperking kan men echter creatief omgaan. De waarden in de gekoppelde cel kunnen getransformeerd worden naar een tweede cel, bijvoorbeeld door te delen door 100. Aldus worden dan indirect aan de schuifbalk de decimale waarden van de tweede cel gekoppeld. Een transformatie naar negatieve getallen gaat analoog.
In het bovenstaande keuzemenu kunnen de toename-



FIGUUR 1, 2, 3, 4

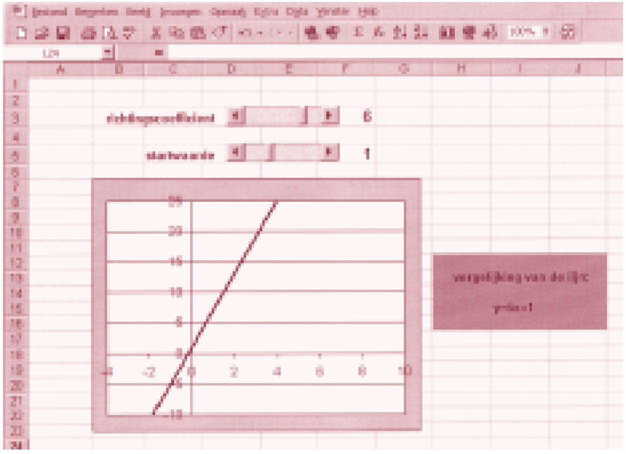
stapjes aangegeven worden waarmee de waarde kan oplopen; in Excel heet dit de ‘oplopende wijziging’. Deze is nodig bij het gebruik van de pijlen aan weerszijden van de schuifbalk. De ‘paginawijziging’ is de toename in grotere stappen, als er binnen de schuifbalk wordt geklikt.
En dan zijn we nu klaar voor het echte werk. De schuifbalk geeft een ideale manier om variabelen in een spreadsheet handzaam onder controle te houden. Het is ook mogelijk om meerdere schuifbalken in een werkblad te zetten.

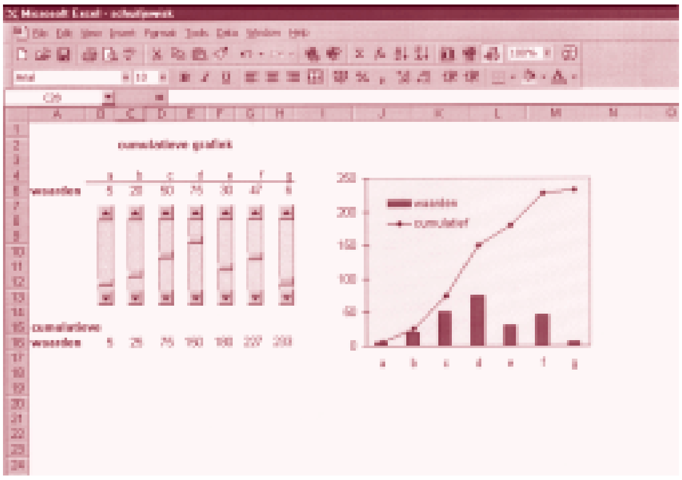
Toepassingen in de les

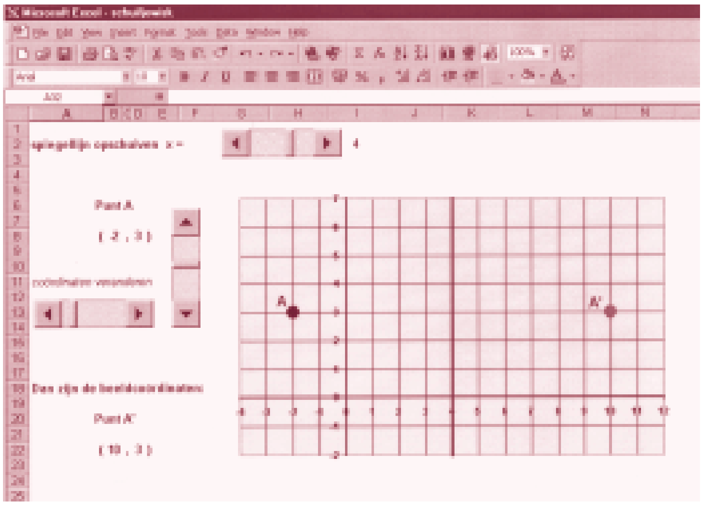
Peter Mulkerrin heeft de Excel-schuifbalken bij verschillende lessen gebruikt. De leerlingen konden aan de balken schuiven, en aldus wiskundige ontdekkingen doen.
Hij gebruikte bijvoorbeeld een eenvoudig spreadsheet voor lineaire formules van de vorm $y = ax + b$ met twee schuifbalken, één voor a en één voor b. Het spreadsheet berekende een verzameling punten (buiten beeld) en tekende de grafiek (in beeld; zie figuur 5).
Bij een hoofdstuk over statistiek ontwierp Peter een spreadsheet voor een staafgrafiek en de bijbehorende cumulatieve grafiek. Door de waarden voor de staven met schuifbalken te veranderen, bleek de stijging van de cumulatieve grafiek ook te veranderen. Hierdoor werd op een dynamische manier duidelijk dat de staven een toenamegrafiek vormden van de cumulatieve grafiek (zie figuur 6).

Een les over spiegeling

Anders dan in Nederland is transformatiemeetkunde een vast onderdeel van het Engelse leerplan. Voor een les over spiegeling in de derde klas maakte Peter Mulkerrin een set spreadsheets waarmee het verband tussen de coördinaten van beeld en origineel bestudeerd konden worden. Het ging hem erom, dat de leerlingen handig de spiegellijn konden verschuiven en eenvoudig konden aflezen hoe dit gevolgen had voor de coördinaten van het beeldpunt. Voor het verschuiven van de spiegellijn werd weer een schuifbalk gebruikt. Het origineel (in de vorm van een dikke stip) was ook verschuifbaar. Het spreadsheet berekende de coördinaten van het beeld en tekende alles (zie figuur 7).
Door het gebruik van Excel werden de leerlingen niet afgeleid door het tekenwerk dat normaliter veel tijd vergt in een les over spiegeling. Hierdoor konden ze zich beter richten op het redeneren. Het doel van de les was dat de leerlingen de getallenpatronen zouden gaan herkennen, een algebraïsch verband zouden vinden, en deze zouden koppelen aan meetkundige eigenschappen. De leerlingen kregen de taak, te voorspellen wat de coördinaten van een beeldpunt zouden zijn bij spiegeling in een verticale lijn. Dit was een open







FIGUUR 5, 6

FIGUUR 7

opdracht waarmee zij op verschillende manieren aan het werk zouden kunnen.
Na een korte inleiding werkten de leerlingen in tweetallen gedurende 50 minuten. De docent liep rond en luisterde. Hij stelde vragen, ontlokte verklaringen voor wat ze ontdekten, en bevestigde telkens opnieuw het belang van de vraag 'waarom?'
De meeste leerlingen ontdekten zelfstandig het verband $(x, y) \rightarrow (2r - x, y)$ waarbij r de waarde is van spiegellijn $x = r$. De verklaring voor het constant blijven van de y-coördinaat was het makkelijkst. Heel wat lastiger was het verband tussen de horizontale coördinaten van origineel en beeld. Alle leerlingen merkten op dat de x-coördinaat van het beeld met 2 stappen veranderde als de spiegellijn met één stap veranderde. Als daarentegen de spiegellijn op z'n plaats bleef en het origineel werd verschoven, dan verschoof het beeld in omgekeerde richting. Dat maakte de min bij de x in het voorschrift aanschouwelijk. Uiteindelijk ontdekten veel leerlingen, dat het verband kon worden afgeleid uit: $2r - x = x + 2(r - x)$.
De verklaring hiervoor luidde als volgt: de afstand tussen x-coördinaat en spiegellijn moet worden verdubbeld, en dan worden uitgezet vanaf de oorspronkelijke x-coördinaat. Andere afleidingen waren ook mogelijk.
Gedurende de les waren de leerlingen geheel opgeslokt door de taak, en ze waren erop gebrand om met elkaar over hun verklaringen te overleggen. Ze vorderden van een vertrouwde aanpak voor spiegeling naar een algebraïsch verband en zelfs met een verklaring voor hun formule. Het gebruik van de schuifbalken gaf hen een gereedschap om met hun ideeën te experimenteren, en het gaf hen direct resultaat.

Bron

Peter Mulkerrin: 'Scroll Bars in Excel' in MicroMath, vol. 16 no 2.
Met dank aan ATM (Association of Teachers of Mathematics).

Opmerking

De Excel-files zijn te downloaden vanaf de Euclides-pagina op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl).

Over de auteur

Peter Mulkerrin (e-mailadres: mulkerrins@lineone.net) geeft les aan het Penrice Community College in Cornwall (Engeland).

Over de bewerkster

Pauline Vos (e-mailadres: vosp@edte.utwente.nl) werkt aan de Universiteit Twente waar zij internationaal vergelijkend onderzoek doet naar wiskundeonderwijs.

Over Grootste Gemene Deler en Kleinste Gemene Veelvoud

Maar er is meer. G.G.D. en K.G.V., s.g., het delen door een breuk — dat alles behoort tot het vaste programma. En het is beslist géén kost voor kinderen. Zo betwijfel ik ook de waarde van vele verhoudingsvraagstukjes, vooral als die vormen aannemen als deze: ,,A, B en C verdelen 15 gld. in verhouding $1\frac{1}{2} : 2 : 2\frac{1}{2}$. B krijgt dus . . . gld.''

Met het ontbinden in factoren staat het m.i. evenzo.

Men realisere zich, dat zulk werk bij tal van examenkandidaatjes wel mòèt leiden tot dril, tot africhten. En dat is de grootste en meest funeste kwaal van het rekenonderwijs. Het V.H.M.O. is niet gediend met leerlingen die ,,rekenen'' identificeren met ,,hokus-pokus'' en dan vaag weten dat wiskunde ,,ook zo iets als rekenen'' is. Het zou de moeite lonen, een onderzoek in te stellen naar de vraag, in hoeverre het rekenonderwijs op de L.S. oorzaak is van een aversie tegen de wiskunde bij de leerlingen van de eerste klassen bij het V.H.M.O. Beide partijen zouden er bij gebaat zijn, als de L.S. dergelijke stof niet behandelde. Als het voortgezet onderwijs er werkelijk behoefte aan gaat krijgen, dan zijn de geesten ook weer een beetje gerijpt en zijn de moeilijkheden niet half zo groot meer. En — dan geschiedt de scholing tenminste onder (vaktechnisch) deskundige leiding.

De nieuwe kweekschool wil vakbekwame onderwijzers helpen vormen, mensen die weten wat onderwijs-geven inhoudt, die dus ook kunnen spelen met de kennis die de gemiddelde Nederlander nodig heeft om zijn maatschappelijke taak naar behoren te kunnen vervullen. Of daar G.G.D. e.t.q. (zie boven) bij hoort, is toch niet dubieus. Daarom acht ik het ook geen ramp, als onze onderwijzers niet in staat zijn, à bout portant allerlei puzzels op te lossen, en evenmin als ze niet in staat zijn om de G.G.D. van 240, 180 en 75 vlot te vinden. Laten we nuchter blijven: Waar, buiten de schoolmuren, berekent men ooit die G.G.D.? Wie, behalve een gespecialiseerd vakman, heeft ooit nodig te weten wat s.g. betekent? En zou zulke stof dan op de basisschool onderwezen moeten worden?

P. Woestenenk over het rekenen op de kweekschool, in Euclides 37 (1961-1962)

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

Ramseygetallen

[Rob Bosch]

Bekijk het volgende kleuringsprobleem voor de graaf K_6, dat wil zeggen een graaf met zes punten waarbij ieder punt met elk ander punt verbonden is. Kleur de 15 lijnen van de graaf met twee kleuren, zeg rood en blauw, zo dat er geen rode of blauwe driehoek (dat is een K_3) ontstaat. Eerst even proberen alvorens verder te lezen. Mocht het niet lukken dan kan de lezer eerst een stapje terug doen en proberen de K_5 (zie figuur) zonder monochromatische driehoeken te kleuren.

Vermoedelijk heeft u voor de K_5 een kleuring gevonden zonder rode of blauwe driehoek, maar draaien de kleuringen van de K_6 steeds op een monochromatische driehoek uit. De volgende stelling is dan geruststellend.

Stelling 1: Iedere tweekleuring van de lijnen van de K_6 bevat een monochromatische K_3.

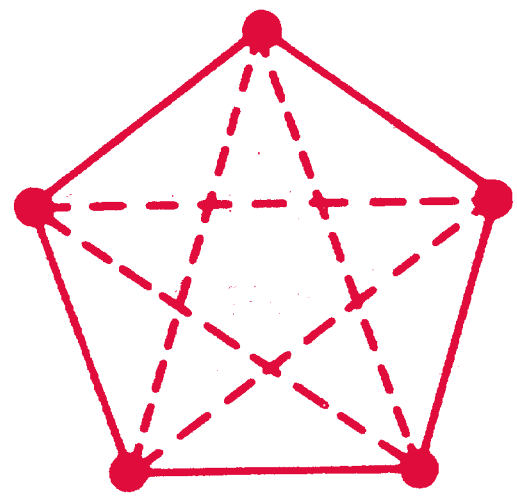
Bewijs: Kies een punt v van de graaf. De verzamelingen R en B zijn de punten van de graaf waarmee het punt v verbonden is door een rode respectievelijk een blauwe lijn. Het aantal punten waarmee het punt v verbonden is, is vijf. Het laatjesprincipe zegt dat minstens een van de verzamelingen R of B drie of meer punten bevat.
Stel R bevat minstens drie punten. Als alle punten in R verbonden zijn door blauwe lijnen, dan hebben we een blauwe K_3. In het geval dat twee punten uit R verbonden zijn door een rode lijn, vormen deze punten tezamen met v een rode driehoek.
In het geval dat B minstens drie punten bevat, verloopt het bewijs analoog.
In beide gevallen bevat de kleuring een monochromatische driehoek. □

Aangezien de K_5 zonder monochromatische driehoek kan worden gekleurd, is de K_6 de kleinste volledige graaf waarbij iedere tweekleuring een monochromatische driehoek oplevert. De kleinste n waarvoor iedere tweekleuring van de lijnen van de K_n een monochromatische K_3 oplevert, heet het Ramseygetal $R(3,3)$ naar Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) die generalisaties van het bovenstaande kleuringsprobleem bestudeerde. Stelling 1 tezamen met een kleuring van de K_5 zonder monochromatische driehoeken laat zien dat $R(3,3) = 6$.

Het bovenstaande kleuringsprobleem kan op vele manieren gegeneraliseerd worden. Bijvoorbeeld op de volgende wijze: Kleur de lijnen van een volledige graaf rood en blauw. Wat is de kleinste n waarvoor bij iedere rood-blauw-kleuring van de lijnen van de K_n er een rode K_3 of een blauwe K_4 ontstaat? Anders gezegd: bepaal $R(3,4)$.
De volgende stelling laat zien dat $R(3,4) \leq 10$.

Stelling 2: Een rood-blauw-kleuring van de lijnen van de K_{10} bevat altijd een rode K_3 of een blauwe K_4 .

Bewijs: Kies een punt v van de graaf en laten de verzamelingen R en B weer de verzamelingen van rode respectievelijk blauwe buurpunten van v zijn.
Stel R bevat minstens vier punten. Als twee punten uit R verbonden zijn door een rode lijn, dan hebben we tezamen met punt v een rode driehoek. In het geval dat alle punten in R verbonden zijn door blauwe lijnen, vinden we een blauwe K_4 .
Stel nu dat de verzameling R hoogstens drie punten bevat. De verzameling B bevat in dit geval dan minstens zes punten. De volledige graaf op de zes punten in B bevat op grond van stelling 1 een monochromatische driehoek. Als deze driehoek rood is



zijn we klaar. In het geval van een blauwe driehoek vormen de hoekpunten van de driehoek tezamen met punt v een blauwe K_4. We zien dus dat de K_{10} altijd een rode driehoek of een blauwe K_4 bevat. □

Door verwisseling van de kleuren krijgen we:

Stelling 3: Een rood-blauw-kleuring van de lijnen van de K_{10} bevat altijd een blauwe K_3 of een rode K_4.

Stelling 2 vertelt ons dat $R(3,4) \leq 10$ en stelling 3 geeft $R(4,3) \leq 10$ Als we nu nog een rood-blauw-kleuring kunnen vinden van de K_9 zonder rode K_3 en zonder blauwe K_4 dan is $R(3,4) = 10$. Maar ja, dan moeten we zo'n kleuring wel kunnen aangeven. Een uitdaging voor de lezer wellicht?
Met behulp van de stellingen 2 en 3 kunnen we ons onderzoek naar de Ramseygetallen voortzetten.

Stelling 4: Elke tweekleuring van de lijnen van de K_{20} bevat een monochromatische K_4.

Bewijs: Kies weer een punt v van de K_{20}. De verzamelingen R en B zijn de ons inmiddels bekende verzamelingen. Een van beide verzamelingen bevat minstens 10 punten.
Stel R bevat minstens 10 punten. Stelling 2 zegt dat de volledige graaf op deze punten een blauwe K_4 of een rode K_3 bevat. In het geval van een blauwe K_4 zijn we klaar. In het andere geval vormt punt v tezamen met de rode driehoek een rode K_4.
Het geval waarin B minstens 10 punten bevat, gaat analoog. □

Bovenstaande stelling vertelt ons dat $R(4, 4) \leq 20$.
In het algemeen is het buitengewoon lastig om Ramseygetallen te bepalen. De waarde van slechts een klein aantal van deze getallen is bekend.
Bekend zijn ondermeer de Ramseygetallen $R(3,4)$ en $R(4,4)$. Zo is $R(3,4) = 9$ en $R(4,4) = 18$. Het aantonen hiervan mag de lezer als een lastige opgave beschouwen.

Literatuur

R.L. Graham (et al.): Ramsey Theory, John Wiley & Sons, New York (2nd editon, 1999)

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is na zijn doctoraal wiskunde 13 jaar werkzaam geweest als wiskundeleraar in het middelbaar onderwijs. Sinds 1987 is hij als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Zijn belangstelling gaat o.a. uit naar de sociale keuzetheorie op welk gebied hij aan de Katholieke Universiteit Brabant onderzoek verricht.

Mededeling / WisWeb-site vernieuwd!

Vanaf 1 februari 2002 is de geheel vernieuwde WisWeb-site bij het Freudenthal Instituut in de lucht. De site ziet er niet alleen anders uit, maar er is ook veel nieuw materiaal (onder andere applets, software, lesmateriaal bij de applets en software) te vinden. Om het u makkelijk te maken is het WisWeb nu ook te vinden onder de url *www.wisweb.nl*

CODES EN GEHEIMSCHRIFTEN IN DE VADERLANDSE GESCHIEDENIS

De historicus Karl de Leeuw schreef een boeiend proefschrift over geheimschriften en codes in de 17e en 18e eeuw [1]. Het biedt een inkijkje op een terrein waarop heel wat bekende wiskundigen maar ook bekende niet-wiskundigen actief zijn geweest. Juist voor de echte A-leerlingen is hierin geschikt materiaal voor een praktische opdracht op de grens van wiskunde en geschiedenis te vinden.

[Harm Jan Smid]

Inleiding

Wat hebben de volgende personen met elkaar gemeen: Marnix van St. Aldegonde, de vermoedelijke dichter van het Wilhelmus en raadsman van Willem van Oranje; François Viète, beroemd Frans wiskundige en diplomaat uit dezelfde tijd; Constantijn Huygens, diplomaat en dichter van enige generaties later; John Wallis, Engels wiskundige uit het einde van de zeventiende eeuw en bekend van zijn wig en zijn product; Willem Jacob 's Gravenzande, befaamd Leids wis- en natuurkundige uit de eerste helft van de achttiende eeuw; Wilhelmina van Pruisen, de echtgenote van stadhouder Willem V en voorouder van de huidige koningin?

Het wat verrassende antwoord is dat ze zich allemaal bezig hielden met het opstellen, gebruiken en ontcijferen van geheimschriften en codes. Die werden vanaf de zestiende eeuw steeds meer in het diplomatieke verkeer gebruikt. De geschiedenis van de cryptografie is verweven met politieke en diplomatieke geschiedenis van dezelfde tijd en biedt daarom soms verrassende inkijkjes in de binnenkamers van de grote politiek.

Code of geheimschrift

Even wat over de terminologie. Soms wordt onderscheid gemaakt tussen een code en een geheimschrift. Bij een code wordt een tekst, letter voor letter of woord voor woord, omgezet in een ander symboolsysteem, meestal getallen. Bij een geheimschrift worden gewone letters gebruikt, maar wordt de tekst zo veranderd dat deze niet meer leesbaar is, of juist heel onschuldig oogt.

Met cryptografie wordt in het Nederlands zowel het gebruik van een code of geheimschrift bedoeld, als het snel groeiende onderdeel van de wiskunde dat zich richt op het beveiligen van boodschappen die geheim moeten blijven. Getaltheorie speelt daarbij een belangrijke rol. Overigens wordt hiervoor ook wel weer de term cryptologie gebruikt.

Coderingstheorie in de wiskunde is iets anders. Daarbij gaat het er om een boodschap, bijvoorbeeld in digitale vorm, zo goed mogelijk over te brengen, en dan speelt geheimhouding juist geen rol.

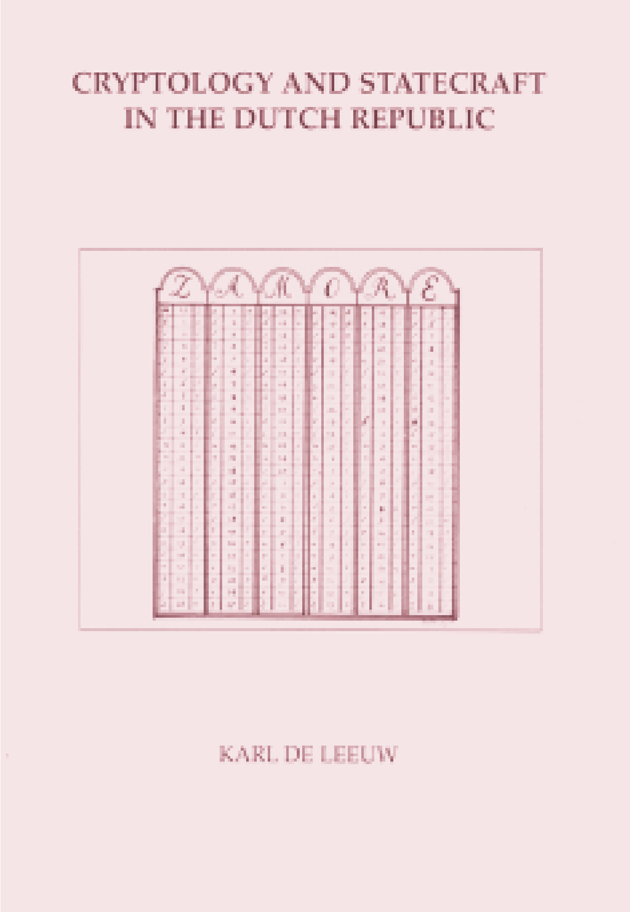
Overigens worden de termen code en geheimschrift soms ook wel door elkaar gebruikt. Ik spreek in dit artikel verder gemakshalve over codes.

Codes en wiskundigen

Bij het opstellen en breken van moderne codes speelt wiskunde een belangrijke rol. Denk maar aan het breken van de Duitse codes in de Tweede Wereldoorlog. Vooraanstaande Engelse wiskundigen speelden toen een hoofdrol bij het breken van de codes voortgebracht met de *Enigma*-machines.

Hoe was eigenlijk de relatie met de wiskunde bij het ontstaan en in zwang komen van codes? Welke rol speelden wiskundigen daarbij? Wallis, Viète en 's Gravenzande waren bekende wiskundigen, maar Marnix, Constantijn Huygens en Wilhelmina bepaald niet.

In zijn interessante en goed leesbare proefschrift *Cryptology and Statecraft in the Dutch Republic* beschrijft historicus Karl de Leeuw het gebruik en het breken van codes in de Nederlandse Republiek in de zeventiende en vooral achttiende eeuw [1]. Alle in het



begin vermelde personen komen in zijn boek voor. De Leeuw laat zien dat ook in de Nederlandse Republiek, aanvankelijk incidenteel, later meer systematisch, gebruik werd gemaakt van eigen codes èn werk werd gemaakt van het breken van de codes van politieke rivalen en tegenstanders. Diplomatieke post werd daartoe in het diepste geheim onderschept en gekopieerd en getracht werd de code te breken. Uiteraard werden de onderschepte brieven na het kopiëren weer verder verzonden, alsof er niets mee gebeurd was. Gedurende verschillende periodes werden deze praktijken ook in Den Haag toegepast. Dat werd in het begin van de achttiende eeuw zelfs zo goed geheim gehouden, dat dit pas nu is onthuld, in één van de artikelen waaruit De Leeuws proefschrift is samengesteld.

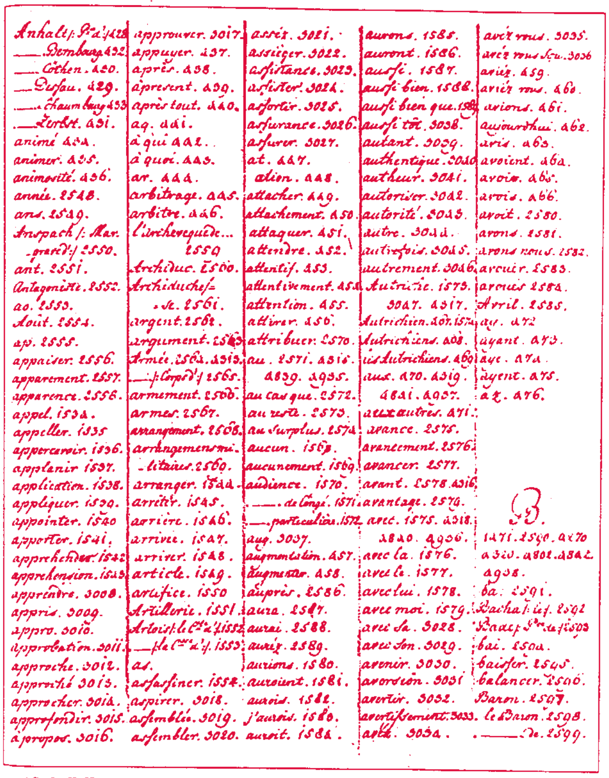
Codes uit de 17e en 18e eeuw

Wat moeten wij ons bij een 17e en 18e eeuwse code nu voorstellen? Verreweg het meest gebruikt werden zogenaamde codeboeken. Zo'n boek was in feite een lange lijst met woorden, minstens een paar duizend, soms meer dan tienduizend. Achter ieder woord stond het getal waardoor het woord vervangen moest worden. Als de woorden alfabetisch gerangschikt stonden, en de daarbij passende getallen opklimmend in grootte, was het codeboek zowel voor het versleutelen als het ontcijferen te gebruiken. Als de bijpassende getallen willekeurig over de woorden gespreid waren, was een apart codeboek voor het ontcijferen nodig, waarin de getallen wel in volgorde stonden. Zo'n tweedelige nomenclatuur, zoals dat heet, is moeilijker te breken dan een eendelige, maar het opstellen van de twee benodigde codeboeken was natuurlijk veel meer werk. Daarnaast waren nog meer verfijningen en kunstgrepen in zwang om het breken van zo'n code te bemoeilijken. In figuur 1 staat zo'n code afgebeeld [1, p.139].
Het kunnen breken van een code was vooral afhankelijk van de hoeveelheid gecodeerd materiaal waarover men kon beschikken. Een enigszins uitvoerige brief bevatte vaak wel wat woorden, plaats- en eigennamen bijvoorbeeld, die niet in een codeboek voorkwamen en dus ongecodeerd bleven. Soms was het mogelijk daardoor al een eerste idee van de inhoud van een brief te krijgen. Verder heeft iedere taal nu eenmaal een aantal woorden en zinswendingen die veel gebruikt worden, en waarvan de code dus ook vaak voorkomt. Dat kan aanwijzingen geven voor de betekenis van veel voorkomende codegroepen. Een code kan dan weer verbeterd worden door voor veel gebruikte woorden meerdere codegetallen te gebruiken, die dus alle naar een zelfde woord verwijzen. Maar toch kon door het combineren van dat soort aanwijzingen, mits de codebreker gewapend was met voldoende speurzin, volhoudingsvermogen, kennis van de structuur van de taal èn gecodeerd materiaal, de code meestal wel gebroken worden. Soms was men er net in geslaagd de code te breken als de tegenstander de codeboeken verving door nieuwe versies, en dan begon het spel weer van voren af aan.
Het regelmatig vernieuwen van de codeboeken was dus van groot belang, maar daar lag gelijk een probleem. Binnen de Republiek waren meestal maar een of twee personen bij dit uiterst geheime werk betrokken, en die hadden nauwelijks tijd om regelmatig nieuwe codeboeken te maken. Men werkte dus vaak langer door met een bepaald boek dan veilig was.
Echt wiskundige kennis speelde bij het breken van zo'n code geen grote rol. Je zou misschien wel kunnen zeggen dat ook wiskundig talent vaak gepaard gaat met het tegelijk nauwkeurige geduldwerk èn spitsvondig giswerk dat voor het breken van een code nodig is. Vandaar wellicht dat mensen als Viète en Wallis er zo succesvol in waren. Maar aanleg voor dat soort werk is niet voorbehouden aan wiskundigen. Marnix en Constantijn Huygens toonden aan dat ook dichters het konden! Hoewel, misschien had Christiaan Huygens zijn talent toch niet van een vreemde...

De laatste stadhouder en de eerste koning

Naast de geschiedenis van het gebruik van codes in Nederland in de 17e en 18e eeuw geeft De Leeuw ook een voorbeeld van het breken van een code. Het gaat om een door hem in een 18e eeuws archief aangetroffen gecodeerd briefje. Het blijkt te gaan om een briefje van Laurens Pieter van de Spiegel, de laatste raadpensionaris van Holland. Tijdens de Patriotische revolutiepoging van 1787 hielden de leden van de Oranjefractie door middel van gecodeerde brieven contact met elkaar. Wilhelmina, de vrouw van stadhouder Willem V zat in 1787 in Nijmegen en deed ijverig mee in die geheime brievenschrijverij. Zo werd onder andere de geheime terugtocht naar Den Haag voorbereid, die zo jammerlijk mislukte te Goejanverwellesluis. Zoals bekend maakte de

Een lexicaal geheimschrift van Wilhelmina van Pruisen op Hampton Court



Afb. 2. K. H. A., stadhouder Willem IV, inv. nr. 301 B, bladzijde uit een tweedelige nomenclatuur.

FIGUUR 1
Afbeelding van een tweedelige code

koning van Pruisen, de broer van Wilhelmina, een eind aan die couppoging.
Later ging het toch mis met de Oranjes. Rond 1800 zat Wilhelmina in Engeland, maar de overige leden van de familie, waaronder de erfprins en latere koning Willem I, zaten in Duitsland. Er vond in die jaren een druk diplomatiek verkeer plaats, waarin de erfprins probeerde zowel zijn Duitse familie te vriend te houden (ook hij was getrouwd met een Pruisische prinses), als zoete broodjes te bakken met Napoleon, die nu eenmaal alle macht in handen leek te hebben. Al die contacten moesten voor alle andere partijen strikt geheim blijven en daarvoor werden dus zo goed mogelijk beveiligde geheimschriften gebruikt. Een aantal van die gecodeerde brieven bevindt zich in het Koninklijk Huisarchief. Uit allerlei bronnen is duidelijk dat Wilhelmina dat codeerwerk grotendeels zelf deed en ook zelf de codes verder verbeterde en beveiligde. De Leeuw laat zien hoe Wilhelmina dat deed. Het geeft tegelijk een aardig inkijkje in een stukje Vaderlandse Geschiedenis waarin de toenmalige Oranjes wel wat minder vaderlandslievend voor de dag komen als de Wilhelmina uit de 20e eeuw!

Een draairooster of turning grill

Het gebruik van codeboeken in de eenvoudige vorm die De Leeuw beschrijft, is wiskundig niet zo interessant. Een methode die in dat opzicht boeiender is, ook al een aantal eeuwen oud, is die van een roostergeheimschrift. De wiskundige Cardano, bekend van de oplossing van derde- en vierdegraadsvergelijkingen, heeft zich hier onder andere mee bezig gehouden.
Het uitgangspunt is een vierkant rooster. Op dat rooster wordt een ander rooster gelegd (bijvoorbeeld van karton) dat een aantal uitsparingen heeft. Door die uitsparingen zijn een aantal letters te lezen, en door die achter elkaar te zetten krijg je het eerste deel van de tekst. Vervolgens wordt het bovenste rooster een kwartslag gedraaid (De Leeuw geeft ook een voorbeeld waarbij het rooster omgedraaid moet worden) en kan het volgende stuk tekst gelezen worden. In figuur 2 staat een simpel voorbeeldje van een 4×4 rooster of *turning grill* [1, p.196].
Bij een rooster met een oneven aantal rijen kan het centrale vakje altijd dicht blijven. Natuurlijk is het aantal woorden van een tekst meestal niet precies een kwadraat, maar door het toevoegen van wat extra letters waardoor de boodschap toch leesbaar blijft, is dat wel op te lossen.
Een aardige vraag is natuurlijk hoeveel roosters - bij gegeven afmeting - er te maken zijn zodat iedere plaats precies één keer opengaat. Aan het rooster is dat niet zomaar te zien. Duidelijk is dat bij een 4×4 rooster het draaikarton vier openingen moet hebben, en dat die bijvoorbeeld niet alle vier op de bovenste rij mogen liggen. Maar wat mag dan wel? In het voorbeeld van figuur 2 is er een rij zonder openingen, en ook een rij met twee openingen. De Leeuw vertelt dat de oplossing vermoedelijk voor het eerst beschreven is in een 18e eeuws tijdschrift, C.F. Hindenburgs *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* (1796, deel 3, 347-351, deel 5, pp.81-99), dat in sommige universiteitsbibliotheken wel te vinden is. Ik volg hier in grote lijnen de beschrijving van De Leeuw. De clou is, dat je niet naar het rooster als geheel moet kijken, maar naar het eerste kwadrant, gevormd door de vier vierkantjes

Karl de Leeuw en Hans van der Meer

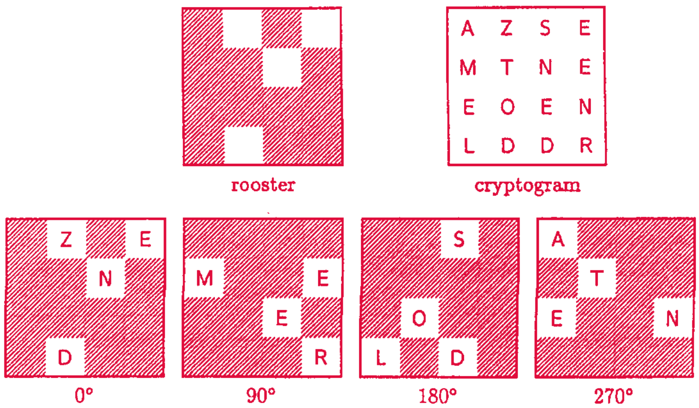


Fig. 2. Turning-grille met 'zend meer soldaten' → AZSEM TNEEO ENLDD R.

FIGUUR 2
Draairooster of turning grill

van de bovenste twee rijen en de twee linker kolommen. Als het rooster ronddraait, komt dit kwadrant achtereenvolgens op het 2e, 3e en 4e kwadrant te liggen. Geef nu van elk vierkantje uit het eerste kwadrant aan bij welke draaiing er een opening moet ontstaan, door aan ieder vierkantje één van de getallen 0, 1, 2 of 3 toe te kennen. Als we linksboven beginnen, dan het vierkantje er naast nemen, dan die op de tweede rij en de eerste kolom, en dan de laatste, dan krijgt het rooster uit ons voorbeeld het getal 1031. Maak nu het draaikarton zo dat precies die vier gaten worden uitgespaard die volgens het toegekende getal in het betreffende kwadrant open moeten gaan. Een ogenblikje peinzen leidt wel tot het inzicht dat aan ieder correct draairooster op die manier een getal van vier cijfers uit het viertallig stelsel kan worden toegekend, en dat omgekeerd natuurlijk ook bij ieder getal van die soort een correct rooster kan worden gemaakt. Bij een 4×4 rooster zijn dus al 4^4 mogelijkheden, bij een 6×6 rooster zelfs al 4^9, ofwel 262144.

Iets voor echte alfa's?

De Leeuws proefschrift is aardige en interessante lectuur voor iedere wiskundige en leraar met historische belangstelling. Het geeft een inkijkje in activiteiten die enigszins tegen de wiskunde aanliggen en waarin een aantal bekende wiskundigen actief zijn geweest. Ik kon verder mijn allang vergeten kennis van allerlei Spaanse en Oostenrijkse successieoorlogen weer eens ophalen, en ook de opmerkelijke activiteiten van de Oranjes rond 1800 zullen voor menigeen een verrassing zijn.

Ook voor leerlingen is er misschien wel wat mee te doen. De leerlingen uit het C&M-profiel moeten net zo goed een praktische opdracht voor wiskunde doen, eventueel in samenwerking met een ander vak. Ik denk dat een leraar die voor dit doel activiteiten of opdrachten voor 'èchte' C&M-leerlingen zoekt, bijvoorbeeld voor die leerlingen die in de oude situatie beslist geen wiskunde gekozen zouden hebben, in samenwerking met een geschiedenisleraar wel aanknopingspunten in De Leeuws proefschrift kan vinden. Zo'n leerling moet, met een van De Leeuws artikelen uit zijn proefschrift als basis en wat verdere literatuur, een aardig werkstuk kunnen maken over een stukje (diplomatieke) Nederlandse geschiedenis uit de achttiende eeuw met daarbij bijvoorbeeld een eigen 6×6 rooster waarin een 'geheime' boodschap kan worden overgebracht. Als zo'n leerling dan en passant ook nog iets over de geschiedenis van de wiskunde opsteekt, is een mooi en verrassend stukje vakken-integratie tot stand gebracht.

Literatuur

[1] Karl de Leeuw: Cryptology and Statecraft in the Dutch Republic, IPA Dissertatiereeks nr. 2000-01, Amsterdam (2000)
De dissertatie is niet in de handel, maar kan tegen betaling van 20 euro bij de auteur (e-mail: de_leeuw@euronet.nl) besteld worden.

Over de auteur

Harm Jan Smid (e-mailadres: h.j.smid@its.tudelft.nl) is werkzaam aan de Faculteit ITS, afdeling toegepaste wiskundige analyse, van de TU Delft.

NOGMAALS BOTTEMA

De Recreatie-rubriek in Euclides 77-4 (januari 2002, pp. 160-165, het Bottema-nummer) telde een viertal meetkundeopgaven, die alle wel iets met Prof.Dr. O. Bottema van doen hebben. Hieronder volgen de oplossingen ervan.

[Dick Klingens]

Vooraf

We vermelden allereerst de Stelling van Ceva [1], genoemd naar Giovanni Ceva (1647-1734), waarvan we gebruik zullen maken bij de oplossing van twee van de 'puzzels' (zie figuur 1).

Stelling (van Ceva): Liggen de punten P, Q, R opvolgend op de zijden AB, BC, CA van driehoek ABC en gaan de lijnen AQ, BR, CP (*hoektransversalen* geheten) door één punt, dan geldt:

$$\frac{PA}{PB}\cdot\frac{QB}{QC}\cdot\frac{RC}{RA}=1$$

en omgekeerd.

Oplossing 09

We bewijzen eerst een hulpstelling die we, hoe kan het anders, ook kunnen vinden in Bottema's *Hoofdstukken* [2; XI, Ongelijkheden in een driehoek, paragraaf 4, p. 47].

Hulpstelling:

In driehoek ABC, met O middelpunt van de omcirkel en straal R en met hoogtepunt H, geldt:

$HO^2=R^2\,(1-8\cos A\cos B\cos C)$.

Bewijs:

Zie figuur 2. Voor de macht $m(H)$ van het punt H ten opzichte van de omcirkel van driehoek ABC geldt:

$m(H)=HA\cdot HA'=R^2-HO^2$.

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$HO^2=R^2-HA\cdot HA' \qquad (9.1)$$

Voor HA geldt, wegens de gelijkvormigheid van de driehoeken AHZ en O_aOZ (Z ligt immers op de lijn OH, de *Euler-lijn* van de driehoek): $HA=2O_aO$.

In driehoek OO_aB is $O=A$, zodat $OO_a=R\cos A$, en dus

$$HA=2R\cos A. \qquad (9.2)$$

In driehoek ABA_a is $BA_a=c\cos B$, terwijl we in driehoek HBA_a en vervolgens in H_bBC vinden:

$$HA_a=BA_a\tan B_bBC=BA_a\cot C=c\cos B\cot C. \qquad (9.3)$$

Bekend is verder dat $HA_a=A_aA'$ zodat uit (9.3) volgt:

$$HA'=2HA_a=2c\cos B\cot C=2\frac{c}{\sin C}\cos B\cos C=4R\cos B\cos C. \qquad (9.4)$$

We vinden uit (9.1) met (9.2) en (9.4):

$$HO^2=R^2-8R^2\cos A\cos B\cos C=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C). \qquad (9.5)$$

Gevolg

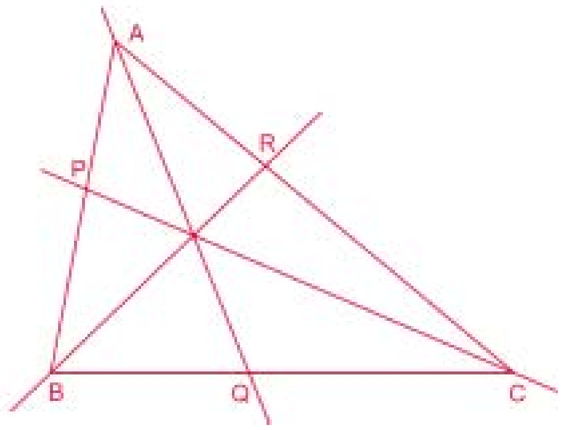
In driehoek ABC is $8\cos A\cos B\cos C\leq 1$, waarbij het gelijkteken (dus) alleen geldt in een gelijkzijdige driehoek. En dit laatste zullen we verderop gebruiken.

Zie nu verder figuur 3, waarin op de zijden driehoeken getekend zijn die gelijkvormig zijn met ABC (zie de hoektekens in de figuur).

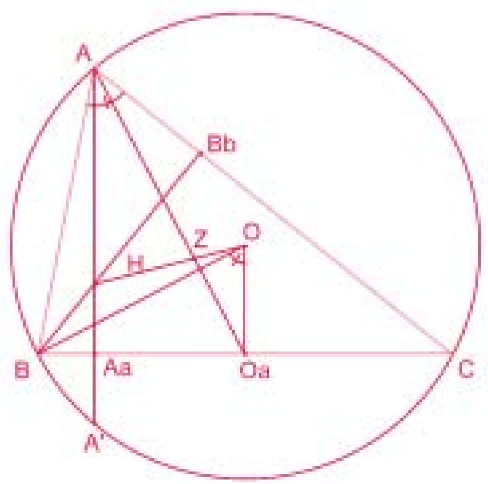
We moesten nu een (zo eenvoudig mogelijke) voorwaarde opstellen waaraan de zijden van ABC voldoen opdat de lijnen AA', BB', CC' door één punt gaan.

We leiden nu die voorwaarde af – een en ander onder dankzegging aan *Floor van Lamoen* voor zijn bijdrage aan een *zo eenvoudig mogelijke* oplossing.

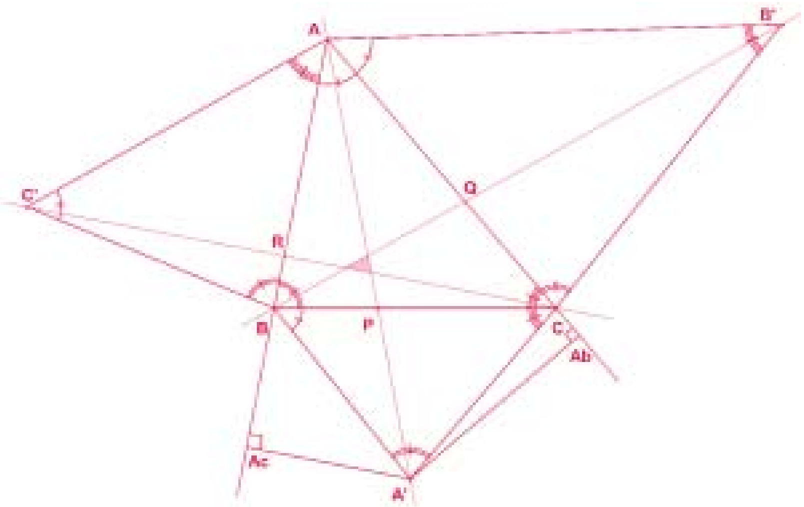
FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3



Zij P het snijpunt van AA' en BC. We zullen de verhouding BP/PC uitdrukken in a, b, c.
De op de zijden van ABC beschreven driehoeken $BA'C$, ACB' en $C'BA$ zijn elk (direct, d.w.z. met behoud van oriëntatie) gelijkvormig met ABC. De zijden van die driehoeken ontstaan dan uit die van ABC door opvolgend te vermenigvuldigen met a/b, b/c en c/a. In driehoek $BA'C$ hebben we dan:

$$BA'=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b};\quad A'C=\frac{a}{b}\cdot a=\frac{a^2}{b}$$

Zijn A_c en A_b opvolgend de voetpunten van A' op de zijden AB en AC van de driehoek, dan volgt:

$$A'A_c=\frac{ac}{b}\sin C$$

(immers in driehoek $A'BA_c$ is hoek $A'BA_c$ gelijk aan C) en

$$A'A_b=\frac{a^2}{b}\sin(180°-2C)=\frac{a^2}{b}\sin 2C$$

(zie de hoeken bij C in figuur 3).
Nu is

$$\begin{aligned}BP : PC &= \text{Opp}(BPA) : \text{Opp}(CPA) = \text{Opp}(BAA') : \text{Opp}(CAA') = (c\cdot A'A_c) : (b\cdot A'A_b)\\ &= \frac{ac^2}{b}\sin C : a^2\sin C\\ &= c^2 : 2ab\cos C \qquad (9.6)\end{aligned}$$

We kunnen met soortgelijke uitdrukkingen als (9.6) voor $CQ : QA$ en $AR : RB$ via de Stelling van Ceva afleiden dat

$$\cos A\,\cos B\,\cos C=\frac{1}{8} \qquad (9.7)$$

of, door toepassing van de cosinusregel, de niet zo eenvoudige, maar wel fraai ogende voorwaarde

$$(b^2+c^2-a^2)\,(c^2+a^2-b^2)\,(a^2+b^2-c^2)=a^2b^2c^2 \qquad (9.8)$$

Uitdrukking (9.7) geeft met het Gevolg van de Hulpstelling hierboven dat de driehoek gelijkzijdig is. De gezochte voorwaarde is dan – en eenvoudiger kan het niet: $a=b=c$.

Voorwaarde (9.8) kunnen we met wat algebra tot hetzelfde resultaat herleiden.
Zonder de algemeenheid geweld aan te doen kunnen we stellen dat $a\leq b\leq c$. We stellen nu verder dat $b^2=a^2+t$ en $c^2=a^2+u$, voor niet-negatieve t en u.
Dit geeft in (9.8):
$(a^2+t+u)(a^2+t-u)(a^2-t+u)=a^2(a^2+t)(a^2+u)$ en dan
$(a^2+t+u)(a^4-(t-u)^2)=a^6+(t+u)a^4+tua^2$
$a^6+(t+u)a^4-a^2(t-u)^2-(t+u)(t-u)^2=a^6+(t+u)a^4+tua^2$
waaruit volgt dat
$-a^2(t-u)^2-(t+u)(t-u)^2=tua^2$
Het linker lid van deze uitdrukking is ≤ 0, het rechter lid is ≥ 0; beide leden zijn dus gelijk aan 0. Uit het rechter lid blijkt dan onmiddellijk dat $t=0$ of $u=0$, uit het linker lid dat $t=u$, zodat $t=u=0$. Maar dan is $a^2=b^2=c^2$, zodat ABC gelijkzijdig is.

Oplossing 10

Hier ging het om het een bijzondere manier van bewijzen van de projectiestelling, de niet-goniometrische variant van de cosinusregel.
Zie figuur 4. AE en AF zijn de lijnen door A die de lijn BC elk onder een hoek die gelijk is aan hoek A, snijden.

AD is de hoogtelijn uit A. Dan is D het midden van EF.
Uit de gelijkheid van de hoeken volgt
$EAC \sim ABC$ en $FAB \sim ACB$
Met de gebruikelijke a, b en c als lengten van de zijden van ABC is dan:
$AC : EC = BC : AC$, of $b^2 = a \cdot EC$, en
$AB : FB = CB : AB$, of $c^2 = a \cdot FB$, zodat
$$b^2 - c^2 = a(EC - FB) \qquad (10.1)$$
Zij nu $BD = p$ en $DE = DF = r$, dan is $EC = a - (p - r) = a - p + r$ en $BF = p + r$.
We vinden dan uit (10.1):
$b^2 - c^2 = a(a - p + r - p - r) = a^2 - 2ap$, waaruit weer volgt:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ap$.
Dit is de projectiestelling voor de zijde b. Het bewijs van de projectiestelling voor zijde c verloopt analoog.

Oplossing 11

We moesten, bij gegeven basis c, de lengte a van de benen van de gelijkbenige driehoek zien te vinden (uitgedrukt in c) als $R + r$ minimaal is.
Zie figuur 5a. Zij nu x de grootte van de basishoeken van de driehoek. Dan is de tophoek gelijk aan $180° - 2x$. Volgens de sinusregel is dan

$$2R = \frac{c}{\sin(180° - 2x)} = \frac{c}{\sin 2x}, \text{ waaruit we vinden}$$

$$R = \frac{c}{2 \sin 2x}.$$

In driehoek AID, waarbij I het middelpunt is van de incirkel van de driehoek, vinden we $r = \frac{1}{2}c \tan \frac{1}{2}x$.
We beschouwen nu de functie

$$f(x) = \frac{1}{\sin 2x} + \tan \tfrac{1}{2}x \text{ op het domein } \langle 0, \tfrac{1}{2}\pi \rangle \text{ en gaan op}$$

zoek naar het minimum van deze functie.
We bepalen eerst de nulpunten van de functie

$$f'(x) = \frac{-2\cos 2x}{\sin^2 2x} + \frac{1}{2\cos^2 \frac{1}{2}x} = \frac{-2\cos 2x}{4 \sin^2 x \cos^2 x} + \frac{1}{\cos x + 1}.$$

Herleiding van $-2\cos 2x(\cos x + 1) + 4\sin^2 x \cos^2 x = 0$ geeft:
$-(2\cos^2 x - 1)(\cos x + 1) + 2(1 - \cos^2 x)\cos^2 x = 0$
$(\cos x + 1)(-2\cos^2 x + 1 + 2\cos^2 x - 2\cos^3 x) = 0$
$(\cos x + 1)(1 - 2\cos^3 x) = 0$
Op het domein van de functie geldt dan $1 - 2\cos^3 x = 0$, zodat $\cos x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
Tja, en we hebben nu eenmaal een grafische rekenmachine tot onze beschikking met behulp waarvan (zie figuur 5b) we kunnen besluiten (mag dat zomaar?) tot een minimum voor die waarde van x.

$$\text{Dus } a = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos x} = \frac{1}{2}c\sqrt[3]{2}.$$

Oplossing 12

Zie figuur 6. We stellen $A_1A_2 = a_3$, $A_2A_3 = a_1$, $A_3A_1 = a_2$.
De punten G_i zijn de raakpunten van de incirkel met de zijden van de driehoek. Nu is, met s gelijk aan de halve omtrek van de driehoek:

$$\frac{G_3A_1}{G_3A_2} \cdot \frac{G_1A_2}{G_1A_3} \cdot \frac{G_2A_3}{G_2A_1} = \frac{s-a_1}{s-a_2} \cdot \frac{s-a_2}{s-a_3} \cdot \frac{s-a_3}{s-a_1} = 1.$$

Volgens de Stelling van Ceva gaan de lijnen A_iG_i dan door één punt, het punt G (het *punt van Gergonne*).
Wegens de ligging van de punten N_i, als spiegelbeeld van G_i in de middens Z_i van de zijden, hebben we nu ook:

$$\frac{N_3A_1}{N_3A_2} \cdot \frac{N_1A_2}{N_1A_3} \cdot \frac{N_2A_3}{N_2A_1} = \frac{s-a_2}{s-a_1} \cdot \frac{s-a_3}{s-a_2} \cdot \frac{s-a_1}{s-a_3} = 1.$$

Ook de lijnen A_iN_i gaan volgens de Stelling van Ceva door één punt, het punt N (het *punt van Nagel*).
We bekijken nu de vermenigvuldiging V met Z, het zwaartepunt van $A_1A_2A_3$, als centrum en factor $-\frac{1}{2}$.
Nu is $V(A_1A_2A_3) = Z_1Z_2Z_3$ (Z_i is het midden van de zijde tegenover A_i).
Onder de vermenigvuldiging V gaat de incirkel van $A_1A_2A_3$ over in de incirkel van $Z_1Z_2Z_3$; $V(I) = S$. Het punt S heet *het punt van Spieker* van driehoek $A_1A_2A_3$.
De punten I, Z en S liggen dus op één lijn, de *lijn van Nagel* van driehoek $A_1A_2A_3$ (zie de lijn n in figuur 6).
Daarbij geldt dat $IZ : ZS = 2 : 1$.
We beschouwen vervolgens de vermenigvuldiging W met N als centrum en factor $\frac{1}{2}$.
Dan is $W(A_1A_2A_3) = B_1B_2B_3$.
De driehoeken $B_1B_2B_3$ en $Z_1Z_2Z_3$ hebben dezelfde incirkel. De punten N, I en S zijn eveneens collineair; ook N ligt dus op de lijn van Nagel, en wel zo, dat S het midden is van NI.
Nu is $NZ = NS + SZ = IS + SZ = \frac{3}{2}ZI + \frac{1}{2}ZI = 2ZI$.
Gevolg: het punt I is het beeld van N onder de vermenigvuldiging V.

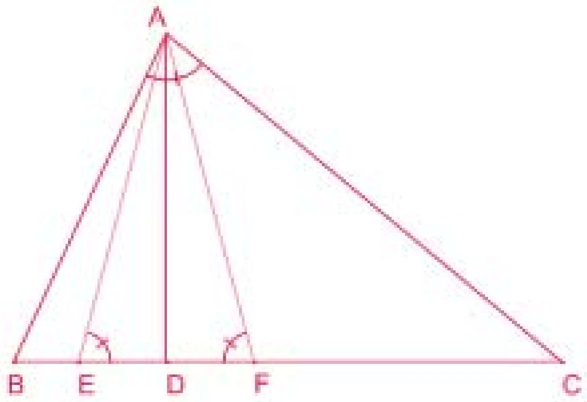
Noten

[1] Voor een bewijs van de Stelling van Ceva zie [2, pp.8–13] of Dick Klingens: Homepage - http://www.pandd.demon.nl/transvers.htm of
P. Wijdenes: Vlakke meetkunde voor voortgezette studie, P. Noordhoff (Groningen, 1964), pp.106–109
[2] O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, Epsilon UItgaven (Utrecht, 1997)

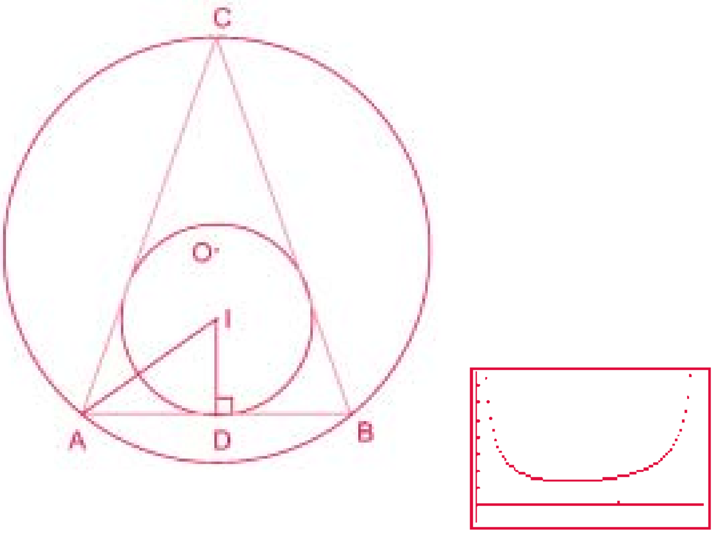
Over de auteur

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.demon.nl) is werkzaam aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is tevens eindredacteur van Euclides.

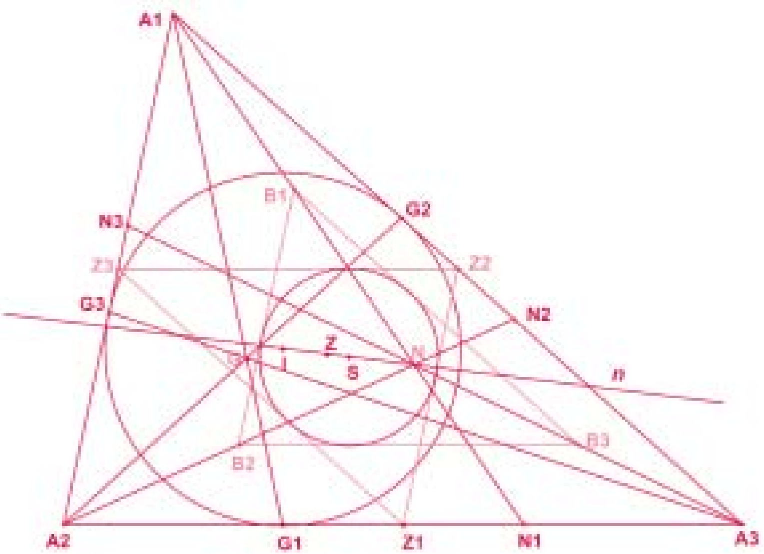
FIGUUR 4



FIGUUR 5A EN 5B



FIGUUR 6



RATIO

Ratio is een instituut binnen de subfaculteit wiskunde van de Katholieke Universiteit Nijmegen (KUN), opgericht om de interesse in wiskunde - en in bètastudies in het algemeen - te bevorderen.

[Mascha Honsbeek]

Inleiding

De belangrijkste activiteit van Ratio is het ontwikkelen van een interactieve wiskundemethode voor de onderbouw van het vwo. Een samenwerkingsverband van docenten en universitaire medewerkers schrijft hoofdstukken die naast de bestaande lesmethoden in de klas te gebruiken zijn. Over een paar jaar zullen deze hoofdstukken een complete methode vormen.
Op de Ratio-webpagina staan ook de andere activiteiten van Ratio. De leerlingen van de bovenbouw en hun docenten vinden hier teksten over wiskundige onderwerpen die op leerlingniveau geschreven zijn. Deze kunnen gebruikt worden voor praktische opdrachten, maar ze kunnen ook gewoon uit interesse gelezen worden.
Naast ondersteuning door de subfaculteit wiskunde van de KUN en WisKids (zie inzet) wordt het project medegefinancierd door de vereniging Ons Middelbaar Onderwijs (een overkoepelende organisatie, waarbij veel Brabantse scholen zijn aangesloten).

Uitgangspunten

Uitgangspunt van Ratio is de vwo-leerling extra uitdaging te bieden. De wiskunde wordt gepresenteerd in relevante contexten. Problemen worden uit de leefwereld geabstraheerd en met behulp van applets, kleine interactieve computerprogrammaatjes, experimenteren leerlingen concreet met de stof. Er wordt duidelijk onderscheid gemaakt tussen leefwereld en wiskunde. Binnen de wiskunde is er ruim aandacht voor redeneren, natuurlijk binnen de mogelijkheden van de leerling.
De Ratio-methode richt zich speciaal op geïnteresseerde vwo-leerlingen die zelfstandig kunnen en willen werken.
De belangrijkste reden om de stof via het internet aan te bieden is de mogelijkheid interactief te werken. Ook kan de leerling zo zelfstandig en op eigen niveau werken. Er zijn veel mogelijkheden tot verdieping of juist extra oefening binnen de methode. De leerling kan ook eenvoudig eerder behandelde stof nazoeken.
Bij het ontwikkelen van de methode wordt steeds bekeken wat de meerwaarde van de computer kan zijn voor de uitleg en oefening van een stuk stof. De leerling krijgt instructies op de computer en zal ook, waar mogelijk, de vragen op de computer beantwoorden.

Werken met de methode

De Ratio-methode wordt aangeboden via het internet. De leerlingen kunnen zelfstandig en eventueel los van de klassituatie met het materiaal aan het werk gaan. De methode probeert de leerling bewust met de geboden stof om te laten gaan: hij/zij moet zich realiseren wat de bedoeling van verschillende stukken stof is. Omdat er niet altijd een docent aanwezig zal zijn wanneer de leerling met de methode aan de slag is, biedt de methode een overzichtelijke structuur. Naast de opgaven bestaan er drie duidelijk herkenbare omgevingen: *theorie*, *geschiedenis* en *beschouwing*.
Ratio gaat uit van één klassikale les per week waarin een docent met de leerlingen de stof van de afgelopen week bespreekt. Leerlingen kijken met de computer zelf hun antwoorden na. Er zijn verschillende vraag/-antwoord-soorten. Bij een multiple-choicevraag of een vraag die een eenduidig antwoord (bijvoorbeeld een getal) heeft, kijkt de computer of het antwoord goed of fout is. Bij vragen waarbij een redenering nodig is, zullen vaak een of meer hints gegeven worden. Bij een deel zal een uitgebreid voorbeeldantwoord komen, bij de rest komt een beknopt antwoord.
Het werk van de leerling zal in een persoonlijke file bijgehouden gaan worden. Dit is niet alleen om te zorgen dat hij/zij zelf eerder gemaakt werk nog eens door kan kijken, ook de docent kan via deze weg zien hoe de voortgang is.

Kenmerken van de methode

De kenmerken van de methode op een rijtje:

- De leerling werkt zelfstandig.
- Er wordt ruim aandacht besteed aan redeneren.
- Wiskundige begrippen worden met zorg geïntroduceerd, gebaseerd op voorbeelden uit de wiskunde en uit de leefwereld. Daarna worden ze nauwkeurig vastgelegd in een 'woordenboek'.
- De leerling maakt aan het eind van elke paragraaf een overzicht van de geleerde stof.
- Elk hoofdstuk eindigt met onderzoeksopdrachten.
- Applets worden ingezet om de leerling (inter)actief met de stof te laten werken. Ze zorgen ook voor een levendig geheel.
- De leerling corrigeert zelf zijn werk op het computerscherm.
- Buiten de verplichte stof worden er verdiepingsmogelijkheden geboden; er zijn 'links' naar achtergronden en uitbreidingen.
- Extra oefensommen kunnen automatisch gegenereerd worden.

Overwegingen

Het werken met de computer lijkt veel voordelen te hebben, maar uit het testen zal moeten blijken wat de beste verhouding is tussen het werken achter de computer en gewoon met pen en papier. Bij sommige opgaven moet een vaardigheid aangeleerd worden, bijvoorbeeld het tekenen of meten van een hoek. Dergelijke opgaven moeten in een werkschrift gemaakt worden.
De computer kan de medeleerlingen en de docent niet geheel vervangen. Werken in tweetallen lijkt ons dan ook een goed idee. De overzichten aan het eind van de paragrafen zijn computervrij. Bovendien zijn de genoemde klassikale bijeenkomsten erg belangrijk.

Testfase

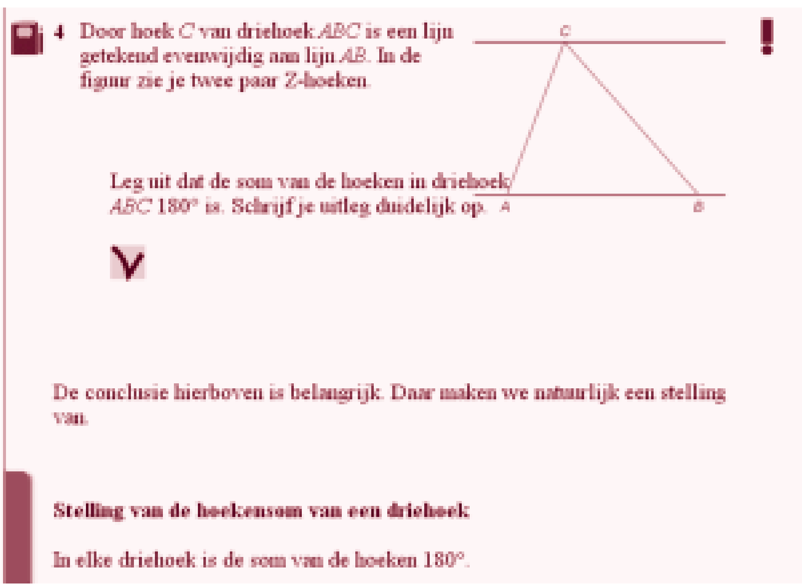
Het eerste hoofdstuk *Hoeken* is nu klaar. Dit is te vinden op de Ratio-webpagina (*www.ratio.kun.nl/hoeken*) en zal in de maanden januari en februari getest worden op een drietal scholen. Kleine groepjes brugklasleerlingen zullen dit onderwerp leren uit de Ratio-methode. In het voorjaar zal ook het hoofdstuk *Machten* op deze manier getest worden.
Aan het eind van het voorjaar zullen we verslag uitbrengen van deze testfase. Volgend jaar zal de verbeterde versie op een grotere groep scholen getest worden. Voor de betreffende docenten zal er een studiedag georganiseerd worden.

Wilt u meer weten over Ratio, kijk dan eens op de webpagina *www.ratio.kun.nl*, email naar *info@ratio.kun.nl* of bel naar de Ratio-kamer: 024-3652997.

Over de auteur

Mascha Honsbeek (e-mailadres: honsbeek@sci.kun.nl) heeft zich binnen de getaltheorie gespecialiseerd in worteluitbreidingen en legt momenteel de laatste hand aan haar proefschrift. Ze werkt bij de KUN als voorlichter wiskunde en is daar coördinator van het project Ratio.

Het **WisKids** project is een gezamenlijk initiatief van wiskundig Nederland. Doelen van WisKids zijn:
het bevorderen van enthousiasme bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via wiskunde, belangstelling voor de exacte vakken bevorderen.
Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), STW/NWO, NVvW, Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade, Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO.
Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door OC&W, Axis, de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalektro van FME-CWM.
Wiskids website: *http://www.fi.uu.nl/wiskids*


4 Door hoek C van driehoek ABC is een lijn getekend evenwijdig aan lijn AB. In de figuur zie je twee paar Z-hoeken.

Leg uit dat de som van de hoeken in driehoek ABC 180° is. Schrijf je uitleg duidelijk op.

De conclusie hierboven is belangrijk. Daar maken we natuurlijk een stelling van.

Stelling van de hoekensom van een driehoek:

In elke driehoek is de som van de hoeken 180°.

$$27 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 1^2 + 1^2$$
$$85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$$
$$125 = 10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$$
$$325 = 18^2 + 1^2 = 17^2 + 6^2 = 15^2 + 10^2$$
$$\begin{aligned} 11212225 &= 3321^2 + 482^2 = 2400^2 + 2335^2 \\ &= 3308^2 + 519^2 = 2848^2 + 1761^2 \\ &= 3335^2 + 500^2 = 2488^2 + 2241^2 \end{aligned}$$
$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$$

ALWEER SOMMEN VAN KWADRATEN

In Euclides 77-3 werd door A.K. van der Vegt een experimentele methode beschreven om een getal als som van twee kwadraten te schrijven. Dit probleem kan ook met getaltheorie aangepakt worden.

[F. van der Blij]

Inleiding

Er zijn verschillende manieren om het probleem, een getal als som van kwadraten te schrijven, aan te pakken. Eén is de experimentele, die tot vermoedens aanleiding geeft en de wiskundige uitdaagt deze vermoedens te weerleggen of te bewijzen. Zo'n aanpak schetst A.K. van der Vegt in het artikel 'Sommen van kwadraten' in Euclides 77, nr. 3 (2001).
Misschien is het voor de lezers van Euclides aardig iets meer te horen met welke theorieën men in dit geval vermoedens kan bewijzen. Soms moet men het probleem in een ander daglicht plaatsen om op goede gedachten te komen. We zullen wel zien.

Viervoud plus één, priem

Laten we beginnen met op te merken dat een klassieke stelling van Fermat leert dat priemgetallen die een viervoud plus één zijn als som van twee kwadraten te schrijven zijn.
Een bewijs hiervan is in vele boeken over elementaire getaltheorie te vinden. We verwijzen naar een mooi bewijs in het boek 'Getaltheorie voor beginners' van Frits Beukers (Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1999), hoofdstuk 12.
Verder geldt dat een priemgetal dat een viervoud plus één is maar op één manier als som van twee kwadraten te schrijven is.
De priemgetallen 5, 13, 17, 29, 37, 41, ... kunnen dus op maar één manier als som van twee kwadraten geschreven worden.
We merken verder op dat, eenvoudig door modulo vier te rekenen, ingezien kan worden dat getallen die een viervoud plus drie zijn nooit als som van twee kwadraten te schrijven zijn.

Roosterpunten op een cirkel

We bekijken het probleem nu op een andere manier. Met $x^2 + y^2 = N$ denken we aan een cirkel met de oorsprong als middelpunt en straal $\sqrt{N}$. We zoeken gehele getallen x en y, dus roosterpunten in het vlak. Wanneer we nu een punt gevonden hebben, voor $N = 5$ het punt $x = 2$, $y = 1$ bijvoorbeeld, vinden we door spiegelen in de coördinaatassen en in de hoekdeellijnen van deze assen direct acht punten op de cirkelomtrek: $(\pm 1, \pm 2)$, $(\pm 2, \pm 1)$.
Maar als N een kwadraat is voldoet een punt op de x-as en dan vinden we door spiegelen maar vier punten. Hetzelfde gebeurt met punten die op de hoekdeellijnen liggen.
De punten op de assen worden in het artikel van Van der Vegt niet meegeteld en terecht want $9 = 3^2 + 0^2$ is geen echte manier om een getal als som van twee kwadraten te schrijven. Maar het wonderlijke is dat voor het aantal roosterpunten op de omtrek van een cirkel met straal $\sqrt{N}$ een heel eenvoudige formule bestaat. Deze formule is echter niet zo eenvoudig te bewijzen; hij wordt in het boek van Beukers ook in hoofdstuk 12 vermeld.

Formule

We beschouwen alle oneven delers d van N. En tellen dan $(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)}$ op over alle oneven positieve delers van N. Vier keer deze som geeft het aantal roosterpunten op de cirkelomtrek. In formule: $4\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)}$
met de som over alle oneven, positieve delers van N.

Als N een oneven priemgetal p is, zijn er maar twee delers, namelijk 1 en p, en we vinden dat een priemgetal dat een viervoud plus drie is, niet als som van twee kwadraten te schrijven is en dat een priemgetal dat een viervoud plus één is, op 8 manieren als som van twee kwadraten te schrijven is. Maar eigenlijk maar op één manier als we alle door symmetrie-eigenschappen verkregen oplossingen voor één oplossing tellen.
Gebruiken we de symmetrie en tellen we op een 'normale' manier het aantal manieren waarop N te schrijven is als de som van twee kwadraten, zodat we zeggen dat bij voorbeeld 5 en 13 maar op één manier als som van twee kwadraten te schrijven zijn, dan moeten we deze formule aanpassen.
Rekening houdend met eventuele roosterpunten op de coördinaatassen of op de deellijnen ervan, vinden we zonder veel moeite een formule voor het aantal manieren waarop N te schrijven is als som van twee kwadraten: $\frac{1}{2}\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)} + \varepsilon$

som over alle oneven, positieve delers d van N.
$\varepsilon = \frac{1}{2}$ als N het dubbele van een kwadraat is, $\varepsilon = -\frac{1}{2}$ als N een kwadraat is en $\varepsilon = 0$ in alle andere gevallen.

Complex

Een andere manier om naar het probleem te kijken is te denken aan het feit dat $x^2 + y^2$ het kwadraat van de absolute waarde van het complexe getal $x + iy$ is. De regel dat de absolute waarde van het product van twee complexe getallen gelijk is aan het product van de absolute waarden geeft dan direct de formules waarmee we een product van sommen van kwadraten kunnen schrijven als de som van twee kwadraten. En met behulp van deze opmerking kunnen we uit de stelling over de voorstelling van priemgetallen door sommen van twee kwadraten direct de formule voor het aantal roosterpunten op de cirkelomtrek afleiden. Zo'n bewijs is onder andere te vinden in het boek van Hardy en Wright: 'An introduction to the theory of numbers' (Oxford University Press, vele drukken) chapter 16.10.

Varianten

Voor sommen van drie kwadraten en sommen van twee derdemachten bestaan niet zulke eenvoudige resultaten. Maar voor sommen van vier kwadraten weer wel (voor insiders: er bestaan quaternionen!). Zelfs voor sommen van acht kwadraten is nog wel iets te zeggen, maar dan is het met de eenvoud ook afgelopen.

Over de auteur

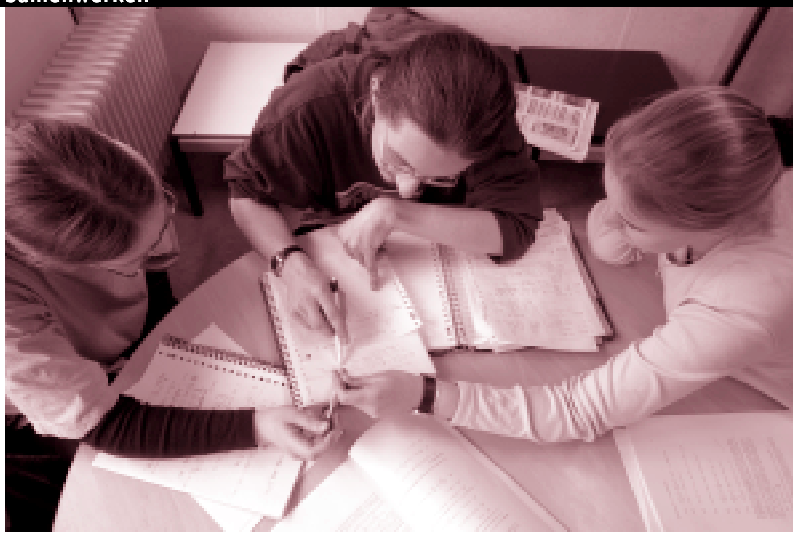
Frederik van der Blij werd in 1923 geboren. Vanaf 1946 was hij enige jaren leraar wiskunde in het voortgezet onderwijs. Daarna was hij als hoogleraar verbonden aan de Rijksuniversiteit Utrecht in welke functie hij ook betrokken was bij verschillende voorlopers van het huidige Freudenthal Instituut.

DUAAL STUDEREN BIJ WISKUNDE EN STATISTIEK

Biedt duaal onderwijs, integratie van werken en leren, wellicht nieuwe mogelijkheden voor de vergroting van de instroom in de wiskundestudie?

[Peter de Paepe]

Samenwerken



Inleiding

Een nieuw fenomeen in het wetenschappelijk onderwijs is de 'duale opleiding'. Dat wil zeggen dat studenten gedurende bepaalde periodes in hun studie een heuse betaalde baan hebben, die zodanig past bij die opleiding dat er ook studiepunten mee te verdienen zijn. Het geleerde kan daadwerkelijk in de praktijk worden gebracht en omgekeerd is de werksituatie een inspiratiebron om in de studie bepaalde zaken bij de kop te pakken. Juist die synergie is kenmerkend voor het duale systeem, waarmee de verbinding tussen universiteit en werkveld op een zinvolle wijze tot stand wordt gebracht.
Bij de Universiteit van Amsterdam heeft men de kans om te mogen dualiseren aangegrepen voor het opzetten van een nieuwe leerroute binnen de opleiding 'Wiskunde en statistiek'. Een uitdaging voor alle betrokkenen! In dit artikel wordt ingegaan op de achtergronden van deze duale studie zodat ook docenten in het vwo weten welke ontwikkelingen in dat opzicht gaande zijn. Het ligt in de bedoeling om te zijner tijd verslag te doen van de ervaringen van studenten die 'het duale pad zijn opgegaan'.

Wel belangstelling, maar niet kiezen

Op het vwo zijn er veel leerlingen met een exact profiel, dus met vakken als wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie. Zo blijkt bijvoorbeeld uit gegevens van het Ministerie van OCenW dat in leerjaar 5 van het vwo 16% van de leerlingen een N&T-profiel heeft (peildatum september 2001). Toch is de animo niet groot om dan ook maar wiskunde te gaan studeren. Kennelijk schrikken leerlingen terug voor een universitaire studie wiskunde. Ze kiezen dan liever een richting waarin die wiskunde wordt toegepast (econometrie bijvoorbeeld) of voor een hbo-opleiding waarin wiskunde een belangrijke rol speelt. Ze hebben wel degelijk belangstelling voor wiskunde, maar ze willen uiteindelijk een leuke en uitdagende baan vinden in het bedrijfsleven. Ze willen best wiskundige structuren bestuderen en abstracte theorieën doorgronden, maar ze voelen er niets voor, vijf jaar lang een theoretische opleiding tot onderzoeker te volgen.



Alternatief voor 'gewone' studie

Feit is dus dat veel opleidingen wiskunde en statistiek klein zijn, ook bij de UvA. In de regel meldt zich een 25-tal eerstejaars aan. Daarvan valt helaas binnen een jaar al vaak een derde deel af. Toch bestaat er een grote behoefte in de maatschappij, in het bijzonder in het bedrijfsleven, aan afgestudeerde wiskundigen en statistici. Daarom is de UvA bezig met de vormgeving van een nieuwe variant van de wiskundestudie: de duale leerweg. Deze is gericht op hen die belangstelling en aanleg voor wiskunde hebben en duidelijk na hun studie een baan in het bedrijfsleven ambiëren. Het is uiteraard een opleiding van hoog wiskundig niveau maar - en dat is betrekkelijk nieuw - met daarnaast nadrukkelijk aandacht voor de eisen die het bedrijfsleven stelt.

Duaal studeren, wat is dat?

Duaal studeren is integratie van leren en werken. In zo'n opleiding zijn er periodes, waarin de student werkt op een plek en in een functie waarbij hij (of zij) de opgedane kennis kan toepassen. Een belangrijk punt in de opleiding is met het oog daarop het geheel aan programma's voor sociale, communicatieve en didactische vaardigheden. De student ontwikkelt zo een professionele werkhouding, leert theoretische kennis toe te passen in werksituaties, versterkt de sociale vaardigheden, creëert netwerken die nuttig kunnen zijn bij het vinden van werk na de studie, ontwikkelt inzicht in wat hij na de studie wil, enzovoort. Na afloop van de studie heeft de student een hoog instapniveau: hij is in staat direct op academisch niveau aan het werk te gaan en is op die manier een waardevolle aanwinst voor het bedrijf.

Om meteen maar misverstanden te voorkomen: ook studenten met de gewone wiskundeopleiding vinden vaak een baan in het bedrijfsleven of bij de (semi)overheid, naast de traditionele functies in het onderwijs. Maar de duale student heeft nu eenmaal een grote voorsprong opgebouwd op z'n collega die ook het bedrijfsleven in wil maar de klassieke weg heeft bewandeld.

Experimentele opzet

Het doel van het aanbieden van de duale variant wiskunde en statistiek is het aantrekkelijk maken van de wiskunde- en statistiekstudie voor een nieuwe groep studenten. Duaal leren kan voor deze studenten een nuttig, stimulerend en afwisselend alternatief zijn. Met het oog daarop is in 1999 voor een periode van drie jaar een experiment gestart met een duale variant van de opleiding. Daarbij wordt in het laatste trimester van het eerste jaar van de studie een programma aangeboden dat een combinatie is van workshops op het gebied van presentatievaardigheden, oriëntatie op de beroepsmogelijkheden van wiskundigen en statistici en informatieve bijeenkomsten over duaal leren. In de loop van het tweede jaar moeten vervolgens enkele keuzes gemaakt worden die differentiëren tussen 'gewoon' of 'duaal' verder gaan. Daarbij bleek toch dat studenten liefst zoveel mogelijk opties open houden en niet graag vérgaande keuzes maken. Alhoewel sommige onderdelen van de duale variant aantrekkelijk gevonden werden, leidde dat er uiteindelijk toe dat slechts één student duaal ging studeren. Binnen het cohort dat in 2000 is gestart, oorspronkelijk ruim 25 studenten, is er toch één student die speciaal voor de duale opleiding gekomen is en overweegt een viertal anderen de duale opleiding na de propaedeuse te gaan volgen. Het gaat dus de goede kant op.

Duale variant

Het beoogde duale studieprogramma loopt deels parallel met het programma van de reguliere variant. Essentieel voor de duale leerroute zijn de twee leerwerkplekken in de laatste drie leerjaren, elk van ongeveer een half jaar gedurende vier dagen per week, bij een bedrijf of instelling waar de student zijn wiskundige gereedschapskist moet gebruiken. Dat houdt in dat de student leert het instrumentarium te kiezen, dat geschikt is om een probleem in een bepaalde situatie aan te pakken en op te lossen. De werkzaamheden moeten natuurlijk aansluiten bij het niveau en de capaciteiten van de student. Deze krijgt daarom een echte functie en werkt als een zelfstandige volwaardige kracht met eigen verantwoordelijkheden. Daarbij hoort ook een normaal salaris en geen onkostenvergoeding, minstens het minimumloon. Je zou de student een werknemer in opleiding kunnen noemen.

Een goede begeleiding zowel van de kant van het bedrijf als van de universiteit is bij dit alles

vanzelfsprekend belangrijk. En omdat communicatie op de werkplek (tijdens maar ook na de opleiding) dagelijks een grote rol speelt, is er in het programma nog méér aandacht voor sociale en communicatieve vaardigheden dan in de reguliere studie.

Belangrijk is het project aan het eind van het tweede jaar, dat bestaat uit een probleem waaraan studenten in kleine groepjes werken onder leiding van een docent. Voor de duale student wordt een 'duaal getinte' invulling gezocht. Hierbij kan gedacht worden aan een werkstuk dat gebaseerd is op een probleem uit het bedrijfsleven (bijvoorbeeld industrie, bankwezen of verzekeringswereld). Verder zijn er enkele vakken 'Wiskunde + Statistiek voor de Praktijk' als voorbereiding op de eerste werkperiode. In één ervan, in het begin van het derde studiejaar, worden de duale studenten geconfronteerd met een casus uit het bedrijfsleven (bijvoorbeeld 'treinenloop' of 'kwaliteitscontrole bij het maken van een product'). Daarbij kan vanuit verschillende visies door gast-sprekers uit het bedrijfsleven een toelichting plaats-vinden, waarna de studenten zelf aan de slag gaan. Naast de benodigde wiskunde en/of statistiek spelen ook praktische factoren en randvoorwaarden, zoals tijd en geld, een rol.

Het tweede en derde trimester van het derde studiejaar is bestemd voor de eerste leerwerkplek. Naast de vier werkdagen is er nog een dag ruimte om in elk van die trimesters een studie-onderdeel te volgen. De tweede leerwerkplek komt in het derde trimester van het vierde jaar en het eerste trimester van het vijfde jaar, met dezelfde opzet. Het laatste halfjaar van de studie is dan bestemd voor het afstudeerproject met bijbehorend verslag. Aldus rondt de duale student na vijf en een half jaar - een half jaar langer dan het reguliere programma - zijn opleiding af.

Verschil met hbo

Het onderscheid met het hbo blijft wel degelijk behouden. Bij het hbo gaat het er vooral om bestaande technieken toe te passen in praktijksituaties. In de hele opleiding Wiskunde en statistiek, regulier of duaal, speelt de theorie achter die technieken een belangrijke rol. De meest gestelde vragen door een student bij ons blijven dan ook: waarom? en: hoe zit dat?

Leerwerkplekken en bedrijven

In de afgelopen periode is duidelijk geworden dat bij bedrijven en instellingen waar men wiskunde of statistiek toepast, bijvoorbeeld in de sectoren overheid en industrie, logistiek, bankwezen, verzekeringswezen, advisering op financieel gebied, it-sector, veel belangstelling bestaat voor de duale opleiding. Er zijn vele redenen voor bedrijven om mee te doen. Bijvoorbeeld omdat men op de hoogte wil blijven van de nieuwste ontwikkelingen op wiskundig/statistisch gebied, of omdat men projecten die wegens gebrek aan tijd of mankracht zijn blijven liggen, wil laten uitvoeren. Of omdat men personen in huis wil halen met een sterk ontwikkeld analytisch vermogen, probleemoplossers dus. En verder kan een geslaagde leerwerkperiode natuurlijk leiden tot een blijvende arbeidsverbintenis na de studie. Een aantal bedrijven heeft al aangegeven mogelijkheden te zien voor leerwerkplekken. We noemen CBS, De Hypothekers Associatie, CQM, PricewaterhouseCoopers, Ernst&Young Actuarissen en Philips Semiconductors Nijmegen. Alumni van de UvA spelen bij het leggen van zulke contacten vaak een belangrijke rol.
Uit de experimenten tot nu toe is gebleken dat studenten die het eerstejaars vaardigheden-programma hebben gevolgd, een helder beeld hebben van wat een leerwerkplek voor hèn zou moeten betekenen. Ze beseffen al snel dat het gaat om een project dat aansluit op het kennisniveau van de student, maar wel degelijk moet kunnen worden afgerond in de daarvoor beschikbare tijd en met een eindproduct waar de werkgever iets aan heeft.

Het duale project van Eddo

Momenteel is Eddo, een van de studenten die voor de duale variant gekozen hebben, bezig met het tweedejaars project. Hij doet in dat kader een opdracht bij een groot taxibedrijf in Noord-Holland, dat onder meer veel zieken en bejaarden vervoert. Het bedrijf wil graag dat er methoden ontwikkeld worden waarmee de dienstverlening beter en de bedrijfsvoering efficiënter gemaakt kan worden. Met name wordt gestreefd naar een betere afstemming van opeenvolgende ritten van een chauffeur en daardoor kortere wachttijden voor klanten. Kennis van het ontstaan van files op de verschillende trajecten is daarbij bijvoorbeeld van belang. Het bedrijf beschikt over veel data en het is de kunst daar op statistisch verantwoorde manier conclusies uit te trekken.
Het is de bedoeling dat Eddo een statistisch model maakt voor de ritduur van een taxi over enkele trajecten en met behulp van de beschikbare data daar conclusies aan verbindt waar het bedrijf iets aan heeft. Dit kan voor Eddo tot een wisselwerking leiden: enerzijds leert hij zijn theoretische kennis van de statistiek te gebruiken in een concrete context en anderzijds geeft de praktijk impulsen tot een verdieping van die theorie.

Verzoek aan vwo-docenten wiskunde

Waarschijnlijk gaat de geringe instroom bij de universitaire opleidingen wiskunde ook u aan het hart. Ik zou u willen verzoeken naast de gewone wiskunde- en statistiek-studies ook de duale varianten onder de aandacht te brengen van dié leerlingen die wellicht een wiskundig getinte studie overwegen.

Over de auteur

Dr. P.J.I.M. de Paepe (e-mailadres: depaepe@science.uva.nl) is coördinator 'Duaal leren wiskunde en statistiek' aan de Universiteit van Amsterdam. Voor meer informatie: 020-5256079.

Aankondiging / Nieuwe producten SLO-project ICT en wiskunde

In het project 'ICT en wiskunde' zijn practica ontwikkeld waarbij de computer gebruikt wordt naast de methoden Moderne wiskunde, Netwerk en Getal en Ruimte.
Bij aantal paragrafen van de genoemde methoden zijn opdrachten geschreven waarbij de leerlingen het spreadsheetprogramma Excel gebruiken.
Naast deze practica zijn een aantal praktische opdrachten voor gebruik in de tweede fase en een aantal GWA's voor gebruik in de basisvorming geproduceerd.

Deze opdrachten zijn voor gebruik binnen school vrij te downloaden van de SLO-site (*www.slo.nl*).

Het project is gestart naar aanleiding van een aanvraag van de NVvW. In het project zijn lesmaterialen gemaakt waarin computergebruik een centrale plaats heeft, met een zo laag mogelijke drempel voor docenten met weinig of geen ICT-ervaring.

Aankondiging / Innovations in Polish maths education

Van maandag 23 september tot zondag 29 september 2002 organiseert EuroSchool, een nevenstichting van het Europees Platform voor het Nederlands Onderwijs, een wiskundeseminar naar Pozna? (Polen) met bovengenoemd thema. Het is bestemd voor wiskunde-docenten uit het voortgezet onderwijs.
Acht wiskundeseminars liggen achter ons. De status van het wiskundeonderwijs werd bestudeerd in Schotland (twee keer),Duitsland, Zweden/Denemarken, Oostenrijk (en Slowakije/Hongarije), Hongarije, België en Finland/Estland. Ook andere aspecten kwamen aan de orde, zoals de onderwijsstructuur, de lerarenopleiding en 'het leven op school'. Daarnaast werd tijd besteed aan de kennismaking met de landen die werden bezocht. De verslagen getuigen van een warme belangstelling voor het wiskundeonderwijs van elders, waardering voor het werk van de 'buitenlandse' collega's en vooral de bewustwording dat in andere landen de wiskunde soms op een geheel eigen wijze wordt benaderd. Zo viel op, dat in de landen van het voormalige oostblok het wiskundeonderwijs nogal traditioneel is, en dat men daar veel waarde hecht aan het oefenen in het maken van vraagstukken die geschikt zijn om te worden opgelost in wedstrijdverband. Op olympiades scoren deze landen altijd zeer hoog. Wiskunde-A is, op Schotland na, in alle overige bezochte landen onbekend. Hoe het wiskundeonderwijs in Polen is geregeld, blijft vooralsnog in nevelen gehuld. Wel is bekend dat er een vernieuwing zal worden doorgevoerd. Daarnaar zijn we benieuwd, vandaar de keuze van het seminarthema. Tijdens het komende studiebezoek wordt ernaar gestreefd te komen tot een kennisuitwisseling. De Nederlandse docenten worden door hun Poolse collega's vertrouwd gemaakt met hun wiskundelespraktijk, terwijl zij op hun beurt aan Poolse leerlingen uit de bovenbouw een les geven over een onderwerp uit het wiskunde-A programma. Het is overigens niet de bedoeling dat alleen modelscholen worden bezocht. Ook de 'gewone leerling' is de moeite waard. Verder wordt er een ongedwongen bijeenkomst met Poolse collega's belegd om ervaringen en ideeën uit te wisselen.
De reis wordt als vanouds geleid door dr. Hans van Lint, oud-voorzitter van de NVvW, en diens levenspartner Jeanne Breeman, ex-wiskundedocente. Het seminar wordt georganiseerd in samenwerking met prof. dr. Adam Marleweski van de Technische Universiteit van Pozna?.

Contouren van het programma

ma 23/09: **in de ochtend vertrek per vliegtuig naar Pozna?**
di 24/09-vr 27/09: **programma met schoolbezoeken (3), discussie met collega's, lezingen over het Poolse wiskundeonderwijs, de didactiek van de wiskunde, enz.**
vr 27/09: **in de namiddag vertrek per bus naar Warschau**
za 28/09: **verblijf in Warschau ter vrije besteding**
zo 29/09: **terugkeer per vliegtuig naar Amsterdam**

De deelnemers ontvangen een beurs waardoor de eigen bijdrage beperkt kan blijven tot € 340 (excl. BTW) per persoon. Bij dit bedrag zijn o.a. inbegrepen: vervoer, accommodatie op basis van halfpension en de kosten van het seminar.

Bent u geïnteresseerd, dan kunt u zich schriftelijk aanmelden onder vermelding van uw naam en adres en van naam en adres van uw school.

Voor nadere inlichtingen kunt u zich, tijdens kantoor-uren, wenden tot Govert Werther, coördinator studiebezoek/seminars EuroSchool; tel.: 072-5118502; e-mail: *werther@europeesplatform.nl.*
Website: *www.euroschool.nl*
Correspondentie-adres:
EuroSchool
t.a.v. drs. Govert Werther
Nassauplein 8, 1815 GM Alkmaar

IMPRESSIES VAN DE STUDIEDAG

Op 17 november 2001 vond de jaarlijkse studiedag annex jaarvergadering van de Vereniging plaats. Hieronder volgen enkele op schrift gezette indrukken opgedaan door een van de deelnemers.

[Gert de Kleuver]

Bert Zwaneveld



Aankondiging van het WereldWiskundeWeb



Inleiding

Door een treinstoring was ik later dan gepland met twee collegae in Utrecht. Die storing trof veel deelnemers, waardoor menigeen de rede van de voorzitter gemist heeft. Gelukkig is de tekst ervan in het vorige nummer te vinden. De nieuwe locatie, Hogeschool Domstad, was voor de werkgroepen beter, gezien de ruimere opzet, maar de plenaire lezingen vond ik in de aula niet zo prettig. Laatkomers waren namelijk hinderlijk, doordat zij onbedoeld meestal via de deur voorin de zaal binnenkwamen.

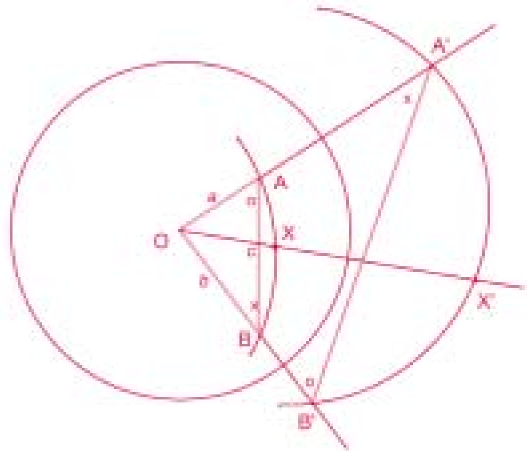
Lezing kennisgrafen

De lezing van Bert Zwaneveld met als titel 'Graven naar wiskundige kennis met hulp van kennisgrafen' was een zeer goed opgebouwd verhaal. Zwaneveld gaf een presentatie over zijn onderzoek waarop hij in 1999 bij Van Streun en Van de Craats promoveerde. Het gebruik van grafen om allerlei onderzoeksresultaten weer te geven vond ik heel mooi. De spreker gaf op goede wijze weer welke probleemstelling hij had in zijn onderzoek: Is het structureren van kennis en vaardigheden door middel van het construeren van kennisgrafen een goede leeractiviteit in het eigen leerproces om tot wiskundige competentie te komen?
Mensen hebben geen goed zicht op hun eigen wiskundige kennis. Natuurlijk weten we ook dat mensen de globale structuren onthouden.
Dat hij op alle vragen en uitgangspunten van zijn onderzoek geen kant en klare antwoorden gekregen heeft werd helder uiteengezet. Gelukkig riep het onderzoek weer nieuwe vragen op, zodat er zeker een vervolgstudie over dit onderwerp kan komen. Voor liefhebbers had Zwaneveld nog een exemplaar van zijn dissertatie.

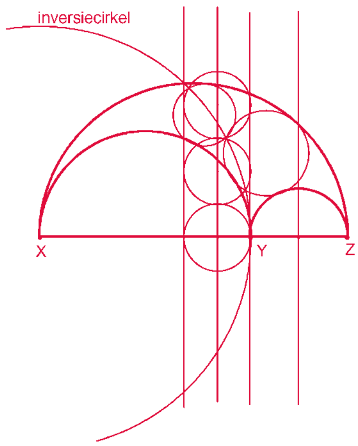
Veiling

Het slot van het plenaire ochtendgedeelte was het in werking stellen van het WereldWiskundeWeb (WWW), de boekenveiling op internet van het WwF, het Wereldwiskunde Fonds. Het WwF is van de bekende boekenstand afgestapt en modern als men ook daar is, kunnen we nu via internet gaan bieden op boeken. Zo werd een openingsbod gerealiseerd op een boek van Van der Blij. Het geboden bedrag werd op de site ingevoerd en nu kan (tot en met 28 februari 2002) het bieden beginnen. Ik hoop dat het voor het WwF veel geld gaat opbrengen, maar zelf vind ik het fijn om boeken even vast te houden en in te zien. Dat kan nu niet meer. Het veilingadres op het web, *http://www.nvvw.nl/www*, kan toegevoegd worden aan uw favorieten. Hopelijk blijven we met zijn allen bieden op de boeken.

FIGUUR 1 Antiparallel



FIGUUR 2 Arbelos





Veel ICT in de workshops



Jan Essers en Dick Klingens

Meetkunde

De eerste ronde van de workshops was voor mij een lesje Cabri waarbij Dick Klingens ons meenam naar de mooie bewijzen van de vlakke meetkunde. Dat Cabri hierbij een goed hulpmiddel is, bleek duidelijk uit de voordracht van Dick, die koorts(acht)ig over het podium heen en weer liep tussen bord, overheadprojector en computer. Het onderwerp inversie was het thema van deze workshop: een vorm van 'spiegelen' in een cirkel met daarbij duidelijke plaatjes die de definitie en eigenschappen van inversie illustreerden. Hij gaf iedere bezoeker een werkblad mee waarop de afbeeldingen die op het scherm werden getoond, ook voorkwamen. Thuis heb ik daardoor wat kunnen oefenen om ook die plaatjes in Cabri te krijgen (zie figuur 1 en 2). Natuurlijk werd al vooruit gelopen op het speciale Bottema-nummer van Euclides (nummer 77-4) waarvoor vele auteurs een mooi meetkundeartikel hebben geschreven.

Markt

De tijd voor de lunch en de markt vond ik ook dit jaar weer aan de krappe kant. De ruimte voor de markt was erg groot en veel instellingen en uitgeverijen presenteerden zich op nadrukkelijke wijze. Heel plezierig om zo rustig al het mooie materiaal te bekijken. Heel duidelijk presenteerden zich de medewerkers van de Wiskunde Olympiade en de Kangoeroe-wedstrijd. Het jeugdig enthousiasme van de medewerkers van Vierkant en Ratio vond ik heel inspirerend. De week na deze dag heb ik mijn 4- en 5-vwo leerlingen gewezen op de website van Ratio, *http://www.ratio.kun.nl*. Ik hoop dat het experiment zich voorspoedig mag uitbreiden en zo jongeren weer kan interesseren voor een studie wiskunde.

Middaglezing

De plenaire middaglezing werd verzorgd door Jan Essers van de Technische Universiteit Eindhoven met als onderwerp 'Aansluitingsproject vwo-wo'. Hij liet zien dat men op vrij eenvoudige wijze aan ideeën kan komen voor een goede praktische opdracht door een programma te demonstreren dat teksten snel kon coderen. Hij gaf studenten de opdracht om de gecodeerde teksten te decoderen. Een en ander is terug te vinden op Jans website, *http://www.win.tue.nl/~jessers/geheimschriften/*

Tot slot

Het programma van dit jaar was zeker de moeite waard en de organisatie kan wat mij betreft terugzien op een geslaagde dag.

Fotografie

Ron Lambriex

Over de auteur

Gert de Kleuver (e-mailadres: g.de.kleuver@freeler.nl) is wiskundedocent aan het Ichthus-College te Veenendaal en onder meer voorzitter van de redactie van Euclides.

Verenigingsnieuws

Van de bestuurstafel

[Marian Kollenveld]

Tweede fase havo/vwo

Herijking

De afgelopen tijd was er weer veel aandacht voor nieuwe veranderingen in de Tweede fase en natuurlijk heeft het bestuur geprobeerd om zoveel mogelijk haar stem te laten horen in de discussie. De herinnering aan vorige zomer was nog zeer levend, toen we plotseling werden geconfronteerd met een aantal niet volstrekt eenduidige maatregelen waaronder de teloorgang van de periodieke functies in het havo en het 'ja/nee/toch niet' verwijderen van de continue dynamische modellen in het vwo.
We hebben gereageerd op het discussiestuk over herijking tweede fase, met daarin voorlopige plannen. Onze reactie stond ook op de website (*www.nvvw.nl*), maar het discussiestuk niet, zodat niet elke zinsnede perfect te plaatsen was. Dit discussiestuk is inmiddels gevolgd door een officiële nota, die wel te vinden is op de website van het ministerie van OC&W (*www.minocw.nl*).
De kern van ons betoog is nog steeds dat we ervan overtuigd zijn dat een groot deel van de problemen bij wiskunde kunnen worden opgelost als de docent de tijd krijgt om zijn/haar werk te doen. En dat scholen er goed aan zouden doen om bij de vertaling van studielast naar contacttijd rekening te houden met de reëel bestaande verschillen tussen vakken. Het is al vaak uit onderzoek gebleken: actief bezig zijn, met veel interactie in de klas, komt de prestaties bij wiskunde zeer ten goede. Zelfstandig bergen sommen doorwerken met een antwoordenboek naast je is voor weinigen het ideaal van inspirerend wiskundeonderwijs. Docent en leerling varen wel bij voldoende goed gebruikte contacttijd. De programma's zijn niet zoveel veranderd dat het ons opeens onmogelijk zou zijn die te onderwijzen, er is de afgelopen jaren de nodige didactische vernieuwing geweest in de richting van meer actief en zelfstandig leren, er komt een steeds beter ICT-aanbod voor wiskunde, en de ervaring met praktische opdrachten neemt ook toe. Met een beetje vakmanschap komen wij daar wel uit, als ons daarvoor de tijd wordt gegund. Ten behoeve van de beraadslaging in de Tweede Kamer op 30 januari heeft het bestuur hierover een brief gestuurd naar de staatssecretaris en de vaste commissie voor onderwijs van de Tweede Kamer. Deze brief staat op de website.

VWO A1

In bedoelde brief staat ook als bestuursstandpunt verwoord voor vwo A1 de mogelijkheid van een jaar eerder afsluiten te bezien, zij het dan bij voorkeur wel met een centraal examen. Hiermee wijken we af van ons eerdere standpunt bij de invoering van de Tweede fase. Toen hebben we ervoor gepleit om A1, toen nog gemeenschappelijk deel geheten, kleiner van omvang en niet in een profiel ondergebracht, na 4-vwo met een schoolexamen af te sluiten voor leerlingen die geen wiskunde in het profiel kozen. De situatie is nu een andere, en signalen van docenten die bij het schoolexamen havo A1 onder druk worden gezet om een voldoende te geven, hebben ons voorzichtiger gemaakt op dit punt. Externe legitimering door een examen kan de positie van de docent ook versterken en duidelijkheid geven over het te bereiken niveau.

Steun

Tot ons genoegen is het gelukt om voor ons streven naar voldoende contacttijd steun te verwerven bij wiskundigen in academische kring. Namens het zogenaamde Voorzittersoverleg Wiskunde (met daarin de voorzitters van de Kamer voor de wiskunde van de VSNU, het Overleg Onderzoekscholen Wiskunde, het Wiskundig Genootschap, de Koninklijke Academieraad voor de Wiskunde, de Nederlandse Onderwijs Commissie Wiskunde, de Adviescommissie Wiskunde van NWO en de NVvW) is een brief gestuurd naar de staatssecretaris, met een afschrift aan de vaste commissie voor onderwijs in de Tweede Kamer, waarin het belang van goed wiskundeonderwijs wordt benadrukt en gepleit wordt voor voldoende contacttijd voor wiskunde, geadstrueerd met een adviestabel. Deze brief staat ook op de website.

Formulekaart

In het overleg met inspectie en alle betrokkenen is nogmaals vastgesteld dat de CEVO-kaart en Wisforta de enige toegestane hulpmiddelen zijn. De EPN-kaart van vorig jaar, als zijnde geen volstrekte deelverzameling, mag dus niet meer gebruikt worden. Maar er is afgesproken om met alle betrokkenen het overleg te hervatten en te komen tot een situatie waarin alle leerlingen op het examen de beschikking hebben over dezelfde formules in dezelfde notatie. Het verslag van de bijeenkomst staat ook op de website.

Hulpkaart GR

Er zijn geen initiatieven ondernomen om te komen tot een hulpkaart voor de bediening van de grafische rekenmachine. Zoals uit de discussie

wel blijkt is het probleem eenvoudig binnen de machine zelf op te lossen.

Algebra op de GR?

Hoe verleidelijk wellicht ook, het probleem van de gebrekkige algebra-kennis van leerlingen mag niet door de machine worden opgelost. Hoewel de techniek voortschrijdt en symbolische manipulaties binnen het bereik van de grafische machines komen, is dit nadrukkelijk niet toegestaan. De algebragroep van de vereniging denkt inmiddels al enige tijd na over de gevolgen van een mogelijke invoering van computer-algebra in het voortgezet onderwijs. Een eerste rapport staat op de website. Als u hierover wilt mee-denken, ontvangt het bestuur graag uw reactie.

VMBO

Kortlopend onderzoek

De Beleidsgroep Kortlopend Onder-zoek van het LPC besloot de onder-zoeksvraag van het bestuur met betrekking tot een onderzoek van de bestaande methoden in het vmbo in verband met authentiek leren voor honorering in aanmerking te doen komen.
Authentiek leren heeft o.a. de kenmerken dat het aansluit bij de belevingswereld van de leerlingen, er wordt uitgegaan van betekenisvolle leertaken, het uitgaat van een actieve participatie van de leerlingen. Het betekent tevens dat leerlingen zelfstandiger leren en dat de rol van de docenten een meer begeleidende is.
Hierin herkennen we veel van de beleidsontwikkelingen binnen het onderwijs van de laatste jaren. Het zijn tevens punten van aandacht zoals we ze tegen komen in de formulering van kerndoelen en examenprogramma's. En is het de inspectie niet die juist gematigd is als het gaat om de rol van de docenten als het gaat om actieve deelname van leerlingen in het leerproces.
Daarnaast klemt de vraag of onze vmbo-leerlingen de wiskunde krijgen die ze echt nodig hebben en derhalve verdienen. Sluit het inderdaad aan bij de belevingswereld van de leerlingen en is het altijd even betekenisvol?
Als we wat willen dan zullen onze methoden toch een bijdrage dienen te leveren om authentiek leren niet in de weg te staan. Hoe staat het hiermee? Het bestuur stelt deze vraag omdat het eventueel bepaalde adequate aanbevelingen uit het onderzoek zou kunnen steunen en uitvoering ervan bepleiten op de plek waar het hoort.
We zijn blij dat de aanvraag is toegekend. We wachten de bevindingen van de commissie af om u daarna op de hoogte te brengen van de resultaten.

Examen vmbo-2003

Zoals bekend zullen in 2003 voor het eerst examens worden afgenomen in de theoretische, de gemengde en de kader- en basisberoepsgerichte leerweg.
Het ministerie maakt elk jaar de keuze bekend van de domeinen voor het centraal schriftelijk examen: in 2003 geen informatieverwerking en statistiek maar meetkunde.
Het bestuur vraagt zich af of de beslissing om het zo te doen wel verstandig is.
Voor juist basisberoepsgerichte leerlingen, overigens ook voor de andere leerwegen, is statistiek een relevant domein. Zeker als we letten op waar de leerstof betekenis heeft voor de sociale redzaamheid. Ook meetkunde geeft in het algemeen mogelijkheden om aan te sluiten bij de beroepsgerichte vakken. Door één domein uit te sluiten wordt de mogelijkheid van een relevant centraal examen beperkt. Er kan te weinig gedifferentieerd worden.
Het bestuur zal de CEVO hieromtrent berichten en haar gedachten tevens kenbaar maken aan het ministerie.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verenigingsnieuws
Regionale bijeenkomsten

[Wim Kuipers]

Evenals vorig jaar zullen er door de NVvW regionale bijeenkomsten georganiseerd worden. De data en de plaatsen:

dinsdag 26 maart in Zwolle

donderdag 4 april in Leiden

woensdag 10 april in Eindhoven

De invulling van de bijeenkomsten zal een andere opzet krijgen. Het bestuur wil namelijk graag met de leden in gesprek komen.
De hoofdlezing zal worden vervangen door een presentatie waarin de nieuwste ontwikkelingen op een rij worden gezet en waarbij de leden de gelegenheid krijgen om hierover met het bestuur in gesprek te gaan. We willen de regionale bijeenkomsten graag gebruiken om te horen wat er leeft aan vragen en suggesties waarvan we in de vorming van beleid en in onze contacten met derden gebruik kunnen maken. Dat betekent dat dit plenaire moment voor docenten van havo/vwo en docenten van vmbo niet meer gemeenschappelijk is.
Naast deze presentatie volgen de gebruikelijke workshop-rondes.
Over deze workshops kunt u half februari de website van de Vereniging raadplegen (*www.nvvw.nl*).

Programma

15.45-16.00	ontvangst
16.00-16.30	presentatie, stand van zaken
16.30-17.00	discussie
17.05-17.55	1e ronde workshops
18.00-18.55	eenvoudige maaltijd, markt
18.55-20.00	2e ronde workshops

Kosten

De deelname aan de bijeenkomsten is gratis voor leden van de NVvW en voor degenen die lid worden bij aanmelding. Voor niet-leden zijn de kosten € 30. Voor de maaltijd vragen we van elke deelnemer € 8.
Nieuwe leden betalen € 10 contributie voor de rest van het jaar (studenten € 5); zij ontvangen alle nummers van de lopende jaargang van Euclides.

Hoe aanmelden?

Uw aanmeldingsformulier kunt u downloaden van de website van de Vereniging, en na invulling toesturen aan
F. Osseweijer,
Lindelaan 79,
3319 XJ Dordrecht
(tel.: 078 6160576).

De overschrijving van het voor u geldende bedrag graag op giro 4470718 t.n.v. NVvW te Dordrecht. Ter plaatse is aanmelding niet mogelijk.
Bij vragen of problemen over de aanmelding of de betaling kunt u zich wenden tot het commissielid Frans Osseweijer, in andere gevallen tot het bestuurslid Wim Kuipers (tel.: 038 4447017).

Zwolle
Leiden
Eindhoven

Aankondiging / HKRWO Symposium 2002

Symposium VIII van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs

De roerige jaren zestig
Van Moderne Wiskunde naar Realistisch Wiskundeonderwijs

zaterdag 25 mei 2002 / Hogeschool Domstad, Koningsbergerstraat 9, Utrecht / 10.15 - 16.00 uur

* Dr. Jan van Maanen interviewt prof. dr. Adri Treffers over
Het didactisch gedachtegoed van Hans Freudenthal

* Drs. Edu Wijdeveld, oud-directeur van het IOWO
Ontstaan, werkwijze en effecten van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en het Instituut Ontwikkeling WiskundeOnderwijs (de jaren 60-70)

* Henk Schuring, oud-medewerker van het CITO
Reflectie op 25 jaar vernieuwingen in het Voortgezet Onderwijs

* Prof. dr. Lieven Verschaffel, Katholieke Universiteit Leuven
Reflectie op 25 jaar vernieuwingen in het Basis Onderwijs

* Algemene discussie naar aanleiding van
de stellingen van de sprekers, die tevens het forum vormen

Verder posterpresentaties en tentoonstelling van oude boeken en dergelijke.

Deelname door overmaking van € 20,- op giro 4657326 t.n.v. HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen).

Het symposium wordt mede mogelijk gemaakt door subsidies van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) en ondersteuning van het Freudenthal Instituut (FI).

Inlichtingen bij E. de Moor, tel: 020 6121382 of 030 2611611, e-mail: *e.demoor@fi.uu.nl*

[Dick Klingens, Herman Ligtenberg]

Oproep prijswinnaars

Mogelijkerwijs heeft een beperkt aantal prijswinnaars van de inmiddels beëindigde ladderwedstrijd van Jan de Geus de beloofde boekenbon nog steeds niet ontvangen.
Als dat u betreft, meldt u zich dan s.v.p. vóór 1 juni aanstaande bij de redactie (zie colofon voor de adressen), graag met opgave van het nummer van Euclides waarin u als prijswinnaar genoemd werd.
De bon wordt dan, mèt onze welgemeende excuses, alsnog toegestuurd.

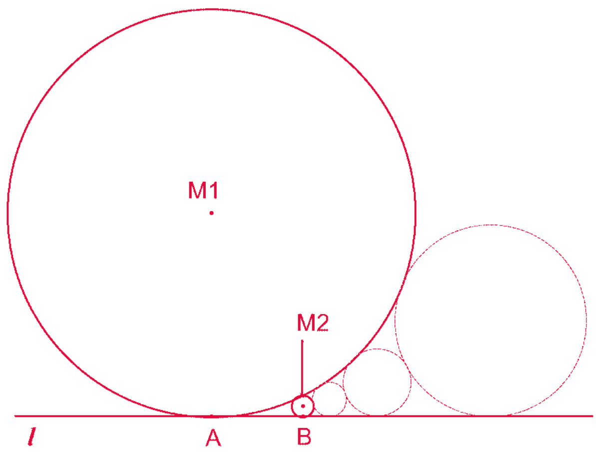
Nieuwe puzzels

In de rubriek 'Recreatie' vindt u in dit en in komende nummers opnieuw enkele puzzels van Herman Ligtenberg. De oplossingen zullen steeds geplaatst worden in het eerstvolgende nummer erna.
De *ladder* is voorlopig echter weggeborgen. Wij hebben op dit moment helaas geen overzicht van de laatste laddertussenstand.
Correspondentie met de redactie hierover en over de puzzels is uiteraard mogelijk.

Puzzel 13 - Opnieuw wat meetkunde

In Euclides 77-4, pp. 160-165, stond een artikel over sangaku's. In het onderstaande probleem wordt daarop wat voortgeborduurd (we herkennen de sangaku).

We gaan uit van twee uitwendig rakende cirkels M_1 en M_2 die beide ook raken aan een lijn l (opvolgend in A en B). Cirkel M_1 heeft een straal van 1 km, cirkel M_2 heeft een straal van 1 mm. De figuur wordt *naar rechts* uitgebreid met een serie cirkels M_i met $i \geq 3$ (M_i raakt uitwendig aan M_{i-1} en aan M_1 en l; zie figuur).
Er komt dan een moment waarop er verder niet kan worden uitgebreid, doordat *rechts* geen raking mogelijk is aan cirkel M_1 – cirkel M_i is te groot geworden.
De vraag is nu met hoeveel cirkels de figuur dan is uitgebreid.



Puzzel 14 - Hermans Wiskogram

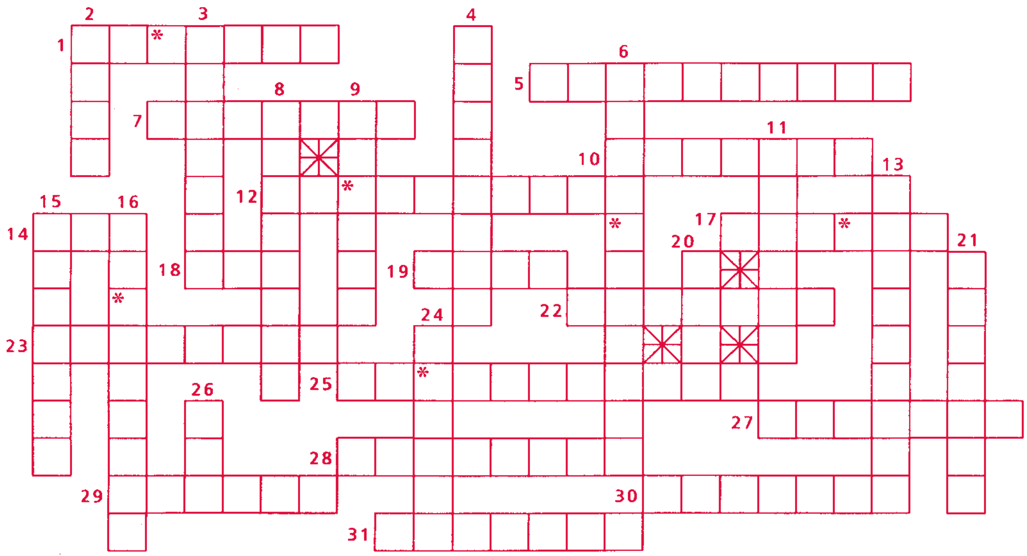
In de figuur moeten 31 woorden worden ingevuld, die alle iets met wiskunde hebben te maken. Elk woord is aangeduid met – hoe kan het anders – een enigszins cryptische omschrijving. Ter vergemakkelijking zijn enkele (niet alle) hokjes waarin dezelfde letter moet komen, aangeduid met een sterretje (*).

Omschrijvingen

1. Standaardvis
2. Voor bevestigen én ontkennen...
3. Hééél eventjes maar.
4. Op de zesde plaats?
5. Top?
6. Hooiland?
7. Zeer frisse functie.
8. Wordt hier N & T tentoongesteld?
9. Centrale verlichting?
10. Meridiaan?
11. Ge gaat niet legitiem tot het uiterste.
12. Door wijziging van de volgorde.
13. Juridische afdeling.
14. Aangenomen dat je op de hoogte bent...
15. Raakt anders in angsten.
16. Praat maar over die variabele.
17. Vanwege 't gymtoestel? Daarom!
18. Lage bewerking.
19. Wiskundige uitdrukking.
20 Halve hoek.
21. Afkerig van een diagram?
22. De symmetrie gaat hier wél op.
23. Onjuiste datering van de afgeleide.
24. S. past uitstekend in deze figuur.
25. Schikking met de ingenieur? Opgelost!
26 Aardige vorm...
27. Niet praktisch: een jongen en een meisje.
28 Schoonmaken is een vak apart.
29. Slot op maat? Dat krijgen we wél rond!
30. Verbinding verbroken?
31. 'Alex' weet er meer van...

Tot slot

De oplossingen van de puzzels (de meetkunde-opgaven) uit het vorige nummer staan op pag. 240-243 van dit nummer van Euclides.



Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de voorlopige verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
6	11 april 2002	26 februari 2002
7	23 mei 2002	08 april 2002
8	24 juni 2002	10 mei 2002

vrijdag 22 maart en zaterdag 23 maart
Finale Wiskunde A-lympiade, Garderen
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 22 maart
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie KUN, zie Euclides 77-2, p. 54

dinsdag 26 maart te Zolle
donderdag 4 april te Leiden
woensdag 10 april te Eindhoven
Regionale studiebijeenkomst
Organisatie NVvW, zie p. 256 in dit nummer

donderdag 4 april
38e Nederlands Mathematisch Congres, Eindhoven
vrijdag 5 april
vervolg NMC met 's middags minisymposium *Interactieve leeromgevingen* en uitreiking *Wiskids scholenprijs*
Organisatie Wiskundig Genootschap

donderdag 25 april
Conferentie ICT in het wiskundeonderwijs, Utrecht
Organisatie APS en Freudenthal Instituut, zie Euclides 77-2, p. 63

zaterdag 25 mei
Symposium HKRWO: De roerige jaren 60
Zie ook p. 257 in dit nummer

maandag 23 september t/m zondag 29 september
Wiskundeseminar in Poznań (Polen)
Organisatie Euroschool (*www.euroschool.nl*)
Zie ook p. 251 in dit nummer

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *http://www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen

Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor € 185,00
Individueel abonnement voor leden: € 34,00
Losse boekjes voor leden: € 8,00
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10).
Zelf ophalen kan in de losse verkoop; ledenprijs op bijeenkomsten € 6,00; in de betere boekhandel € 8,00.

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 90 01 65956 X; prijs € 8,00; te bestellen in de boekhandel.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).
Leden: € 22,00; niet-leden: € 28,00 (incl. verzendkosten).
Zie eventueel ook de advertentie in Euclides 76-7 (na p. 288).

Nieuw

Examenbundels wiskunde A en B voor havo

De opgavenbundels wiskunde voor havo zijn herzien! Onder redactie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zijn de bundels afgestemd op de vernieuwde examenprogramma's in de Tweede Fase van het voortgezet onderwijs. Nieuw is de nadrukkelijke aanwezigheid van de grafische rekenmachine in de analyse.



In de A-bundel is volop aandacht voor differentiëren en economische contexten. In het domein Binomiale verdeling ligt de nadruk op de eindtermen die in het Centraal Schriftelijk Examen worden getoetst.

In de B-bundel is ruimtemeetkunde ingeperkt en zijn opgaven over kans-rekening en statistiek ingevoerd.

Beide bundels zijn zeer geschikt om zelfstandig mee te werken!

Kortom:

- **Aangepast aan vernieuwde examenprogramma's**
- **Volledige integratie van de grafische rekenmachine**
- **Opgaven per domein gerangschikt**
- **Volledige uitwerkingen**
- **Uitleg van termen die op het examen gebruikt kunnen worden**
- **Recente examens**

De bundels zijn alleen voor rekening leverbaar (bundel A vanaf januari 2002, bundel B vanaf december 2001). Stuur de bon in een gefrankeerde envelop naar Wolters-Noordhoff, tav. Afd. voorlichting Exact, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Bestelcoupon

Ja, ik bestel

___ ex. Oefenopgaven voor examens wiskunde havo A1 en A1,2
à € 12,50 per deel 90 01 65959 4

___ ex. Oefenopgaven voor examens wiskunde havo B1 en B1,2
à € 12,50 per deel 90 01 65957 8

Naam school ______________________

Ter attentie van ______________________

Adres ______________________

Postcode/Plaats ______________________

420/1178

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11
Fax (050) 522 62 55

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters Noordhoff

420/1178